ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Победители конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России

М. Л. Краснов
А. И. Киселев
Г. И. Макаренко

Интегральные уравнения

ЗАДАЧИ и ПРИМЕРЫ С ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

УРСС

ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЗАДАЧИ
и
примеры с подробными решениями

Издание третье,
исправленное

*Книга была допущена Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических учебных заведений*

УРСС
Москва • 2003

ББК 22.161.6я73

Краснов Михаил Леонтьевич,
Киселев Александр Иванович,
Макаренко Григорий Иванович

Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями:
Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 192 с.
(Вся высшая математика в задачах.)

ISBN 5-354-00390-3

В настоящем учебном пособии авторы предлагают задачи по методам решения интегральных уравнений. В начале каждого раздела книги приводится сводка основных теоретических положений, определений и формул, а также подробно разбирается более 70 типовых примеров. В книге содержится 350 задач и примеров для самостоятельного решения, большинство которых снабжено ответами и указаниями к решению.

Пособие предназначено для студентов технических вузов с математической подготовкой, а также для всех лиц, желающих познакомиться с методами решений основных типов интегральных уравнений.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 15.05.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 3000 экз. Печ. л. 12. Зак. № 264

Отпечатано в типографии ИПО «Профиздат». 109044, г. Москва, Крутицкий вал, 18.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet:* http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00390-3

Предварительные замечания

1. Функция $f(x)$, неотрицательная на интервале (a, b), называется *суммируемой* на этом интервале, если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ конечен[1].

Функция $f(x)$ произвольного знака будет суммируемой на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда суммируема функция $|f(x)|$, т. е. когда интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ имеет конечное значение.

В дальнейшем мы будем иметь дело с основным интервалом $I = (a, b)$ (или $I_0 = (0, a)$) и основным квадратом $\Omega\,\{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$ (или $\Omega_0\,\{0 \leqslant x,\ t \leqslant a\}$).

2. Пространство $L_2(a, b)$. Говорят, что $f(x)$ есть *функция с интегрируемым квадратом на* $[a, b]$, если интеграл

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$$

существует (конечен). Совокупность всех функций с интегрируемым квадратом на $[a, b]$ обозначим $L_2(a, b)$, или коротко L_2.

Основные свойства функций из L_2

1. Произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция.
2. Сумма двух функций из L_2 также принадлежит L_2.
3. Если $f(x) \in L_2$ и λ — произвольное действительное число, то

$$\lambda f(x) \in L_2.$$

4. Если $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$, то имеет место неравенство Буняковского—Шварца

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \int\limits_a^b g^2(x)\,dx. \qquad (1)$$

---

[1] Интеграл понимается в смысле Лебега, однако читатель, незнакомый с интегралом Лебега, может всюду понимать интегралы в смысле Римана.

Скалярным произведением двух функций $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$ называется число

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2}$$

Нормой функции $f(x) \in L_2$ называют неотрицательное число

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}. \tag{3}$$

5. Для $f(x)$ и $g(x)$ из L_2 имеет место неравенство треугольника

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|. \tag{4}$$

6. *Сходимость в среднем.* Пусть функции

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

суммируемы с квадратом на (a,b). Если

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0,$$

то говорят, что последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, … *сходится в среднем* или, точнее, *в среднем квадратичном* к функции $f(x)$.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ функций из L_2 сходится равномерно к $f(x)$, то $f(x) \in L_2$ и $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем.

Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ функций из L_2 сходится *в среднем в себе*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что

$$\int\limits_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2\,dx \leqslant \varepsilon$$

при $n > N$ и $m > N$. Сходящиеся в себе последовательности называются *фундаментальными*. Чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась в среднем к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной. Пространство L_2 полно, т. е. всякая фундаментальная последовательность функций из L_2 сходится к функции, также принадлежащей L_2.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(a,b)$ называются *эквивалентными* на (a,b), если $f(x) \neq g(x)$ лишь на множестве меры нуль. В этом случае говорят, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на (a,b).

3. Пространство $C^{(l)}(a, b)$. Элементами этого пространства являются всевозможные функции, определенные на отрезке $[a, b]$ и имеющие на этом отрезке непрерывные производные до l-й включительно. Операции сложения функций и умножения функции на число определяются обычным образом.

Норму элемента $f(x) \in C^{(l)}(a, b)$ определяем по формуле

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|f^{(k)}(x)\right|,$$

причем $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Сходимость в $C^{(l)}(a, b)$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательностей их производных k-го порядка ($k = 1, 2, \ldots, l$).

Понятие суммируемой функции переносится на случай пространства большего числа измерений. Так, например, функцию $F(x, t)$ будем называть *суммируемой с квадратом* на $\Omega\{a \leqslant x, t \leqslant b\}$, если

$$\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\, dx\, dt < +\infty.$$

Норма функции $F(x, t)$ в этом случае определяется равенством

$$\|F\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\, dx\, dt}.$$

4. Функция $f(z)$ комплексного переменного z, дифференцируемая в каждой точке области G плоскости комплексного переменного z, называется *аналитической* (регулярной) в этой области.

Функция $f(z)$ называется *целой*, если она аналитическая во всей плоскости (исключая бесконечно удаленную точку).

Функция $f(z)$ называется *мероморфной* (или дробной), если она может быть представлена в виде частного двух целых функций:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad h(z) \not\equiv 0.$$

Мероморфная функция $f(z)$ в любой ограниченной области может иметь лишь конечное число полюсов.

Точка $z = a$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z - a| < \delta$ этой точки, в которой $f(z)$ аналитична, а в самой точке $z = a$ аналитичность функции нарушается.

Изолированная особая точка $z = a$ называется *полюсом* функции $f(z)$, если

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

(предполагается, что $f(z)$ однозначна в окрестности точки $z = a$, $z \neq a$).

Для того чтобы точка $z = a$ была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, т. е. чтобы $\varphi(a) = 0$.

Порядком полюса $z = a$ функции $f(z)$ называют порядок нуля $z = a$ функции

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

5. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ называется число

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c f(z)\,dz,$$

где c — окружность $|z-a| = \rho$ достаточно малого радиуса.

Если точка $z = a$ есть полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(z-a)^n f(z)\right\}.$$

Для простого полюса ($n = 1$)

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\left\{(z-a)f(z)\right\}.$$

Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a) \neq 0$, а $\psi(z)$ в точке $z = a$ имеет нуль первого порядка, т. е. $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

6. Лемма Жордана. *Если $f(z)$ непрерывна в области $|z| \geqslant R_0$, $\operatorname{Im} z \geqslant \alpha$ (α — фиксированное действительное число) и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то для любого $\lambda > 0$*

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{c_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0,$$

где c_R — дуга окружности $|z| = R$, лежащая в рассматриваемой области.

7. Функция $f(x)$ называется *локально суммируемой*, если она суммируема на любом ограниченном множестве.

Пусть комплекснозначная функция $\varphi(t)$ действительного переменного t локально суммируема, равна нулю при $t < 0$ и удовлетворяет условию $|\varphi(t)| < Me^{s_0 t}$ для всех t ($M > 0$, $s_0 \geqslant 0$). Такие функции $\varphi(t)$ будем называть *функциями-оригиналами*. Число s_0 называется *показателем роста* функции $\varphi(t)$.

Преобразованием Лапласа (изображением) *функции* $\varphi(t)$ назовем функцию $\Phi(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую равенством

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt.$$

Для всякого оригинала $\varphi(t)$ функция $\Phi(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией. Тот факт, что функция $\Phi(p)$ есть преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$, будем записывать так:

$$\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p).$$

8. Теорема обращения. *Если функция $\varphi(t)$ является оригиналом, а функция $\Phi(p)$ служит ее изображением, то*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)\,dp, \quad \gamma > s_0, \tag{5}$$

где интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, параллельной мнимой оси, и понимается в смысле главного значения:

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)\,dp = \lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pt}\Phi(p)\,dp.$$

Формула (5) называется *формулой обращения* преобразования Лапласа. Если

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

где $M(p)$ и $N(p)$ — многочлены от p, причем степень многочлена $M(p)$ меньше степени многочлена $N(p)$, то оригиналом для $\Phi(p)$ будет

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left\{(p-a_k)^{n_k}\Phi(p)\,e^{pt}\right\},$$

где a_k — полюсы $\Phi(p)$, n_k — их порядки и сумма берется по всем полюсам функции $\Phi(p)$.

В случае, когда все полюсы a_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ функции $\Phi(p) = \dfrac{M(p)}{N(p)}$ простые, имеем

$$\frac{M(p)}{N(p)} \risingdotseq \sum_{k=1}^{l} \frac{M(a_k)}{N'(a_k)} e^{a_k t} = \varphi(t).$$

9. Теорема умножения. *Пусть функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями-оригиналами, и пусть*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p).$$

Тогда

$$F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Интеграл в правой части (6) называется *сверткой* функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается символом $f(t) * \varphi(t)$.

Таким образом, произведение изображений является также изображением, а именно, изображением свертки оригиналов:

$$F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq f(t) * \varphi(t).$$

10. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси $-\infty < x < +\infty$. Функция

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \qquad \left(\text{или} \quad \tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\right)$$

называется *преобразованием Фурье функции $f(x)$*.

Формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda \qquad \left(\text{или} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda\right).$$

Чтобы придать формулам прямого и обратного преобразований Фурье большую симметричность, их часто записывают в виде

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

ГЛАВА 1 Интегральные уравнения Вольтерра

§ 1. Основные понятия

Уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $f(x)$, $K(x,t)$ — известные функции, $\varphi(x)$ — искомая функция, λ — числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода*. Функция $K(x,t)$ называется *ядром уравнения* Вольтерра. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

и называется *однородным* уравнением Вольтерра 2-го рода.

Уравнение

$$\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция, называют *интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода*. Не нарушая общности, можем считать нижний предел a равным нулю, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Решением интегрального уравнения (1), (2) или (3) называют функцию $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество (по x).

Пример 1. Показать, что функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\,\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Решение. Подставляя вместо $\varphi(x)$ в правую часть (4) функцию $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, будем иметь

$$\frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\,\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \varphi(x).$$

Таким образом, подстановка $\varphi(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ в обе части уравнения (4) обращает последнее в тождество по x:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \equiv \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Это означает, согласно определению, что $\varphi(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ есть решение интегрального уравнения (4). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, что данные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений:

1. $\varphi(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$; $\quad \varphi(x) = \dfrac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \displaystyle\int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2}\,\varphi(t)\,dt.$

2. $\varphi(x) = e^x(\cos e^x - e^x \sin e^x)$;

$$\varphi(x) = (1 - xe^{2x})\cos 1 - e^{2x}\sin 1 + \int_0^x \left[1 - (x-t)e^{2x}\right]\varphi(t)\,dt.$$

3. $\varphi(x) = xe^x$; $\quad \varphi(x) = e^x \sin x + 2\displaystyle\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

4. $\varphi(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$; $\quad \varphi(x) = x - \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

5. $\varphi(x) = 1 - x$; $\quad \displaystyle\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$ **6.** $\varphi(x) = 3$; $\quad x^3 = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt.$

7. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}$; $\quad \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = \sqrt{x}.$ **8.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}}$; $\quad \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = 1.$

Замечание. Интегральные уравнения Вольтерра возникают в тех задачах физики, в которых существует предпочтительное направление изменения независимого переменного (например, времени, энергии и т. д.).

Пример 2. Рассмотрим пучок рентгеновских лучей, проходящий через вещество в направлении оси OX. Будем считать, что при рассеянии пучок сохраняет это направление. Рассмотрим совокупность лучей с заданной длиной волны. Проходя через слой вещества толщины dx, часть этих лучей поглощается, а часть изменяет длину волны из-за рассеяния. С другой стороны, эта совокупность пополняется за счет тех лучей, которые, обладая первоначально большей энергией (т. е. имея меньшую длину волны λ), теряют часть своей энергии из-за рассеяния. Таким образом, если функция $f(\lambda, x)\,d\lambda$ задает совокупность лучей, длина волн которых заключена в интервале от λ до $\lambda + d\lambda$, то

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x} = -\mu f(\lambda, x) + \int_0^\lambda P(\lambda, \tau) f(\tau, x)\,d\tau,$$

где μ — коэффициент поглощения, а $P(\lambda, \tau)\,d\tau$ — вероятность того, что луч с длиной волны τ, проходя слой единичной толщины, приобретет длину волны, заключенную между λ и $\lambda + d\lambda$.

Мы получили так называемое *интегро-дифференциальное уравнение*, т. е. уравнение, в которое неизвестная функция $f(\lambda, x)$ входит под знаками производной и интеграла.

Полагая

$$f(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-px} \psi(\lambda, p)\,dp,$$

где $\psi(\lambda, p)$ — новая неизвестная функция, найдем, что $\psi(\lambda, p)$ будет удовлетворять интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\psi(\lambda, p) = \frac{1}{\mu - p} \int_0^\lambda P(\lambda, \tau)\,\psi(\tau, p)\,d\tau.$$

§ 2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра

Решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x) y = F(x) \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при начальных условиях

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = C_{n-1}, \tag{2}$$

может быть сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

Покажем это на примере дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x), \tag{1'}$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \tag{2'}$$

Полагаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{3}$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия (2′), последовательно находим

$$\frac{dy}{dx} = \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt + C_1, \quad y = \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1x + C_0. \tag{4}$$

При этом мы использовали формулу

$$\underbrace{\int\limits_{x_0}^x dx \int\limits_{x_0}^x dx \ldots \int\limits_{x_0}^x}_{n} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Учитывая (3) и (4), дифференциальное уравнение (1′) запишем так:

$$\varphi(x) + \int\limits_0^x a_1(x)\,\varphi(t)\,dt + C_1a_1(x) + \int\limits_0^x a_2(x)(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \\ + C_1xa_2(x) + C_0a_2(x) = F(x),$$

или

$$\varphi(x) + \int\limits_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right]\varphi(t)\,dt = \\ = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x). \tag{5}$$

Полагая

$$K(x,t) = -\left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right], \tag{6}$$

$$f(x) = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x), \tag{7}$$

приведем (5) к виду

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt + f(x), \tag{8}$$

т. е. придем к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода.

Существование единственного решения уравнения (8) следует из существования и единственности решения задачи Коши $(1')-(2')$ для линейного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами в окрестности точки $x = 0$.

И наоборот, решая интегральное уравнение (8) с K и f, определенными по формулам (6) и (7), и подставляя выражение, полученное для $\varphi(x)$, в последнее из уравнений (4), мы получим единственное решение уравнения $(1')$, удовлетворяющее начальным условиям $(2')$.

Пример 1. Составить интегральное уравнение, соответстеующее дифференциальному уравнению

$$y'' + xy' + y = 0$$

и начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение. Полагаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{9}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\,dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)\,dt, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + 1. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в данное дифференциальное уравнение, найдем

$$\varphi(x) + \int_0^x x\,\varphi(t)\,dt + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + 1 = 0,$$

или

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\,\varphi(t)\,dt. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим дифференциальным уравнениям с заданными начальными условиями:

9. $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **10.** $y' - y = 0$; $y(0) = 1$.

11. $y'' + y = \cos x;$ $y(0) = y'(0) = 0.$

12. $y'' - 5y' + 6y = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

13. $y'' + y = \cos x;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

14. $y'' - y' \sin x + e^x y = x;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

15. $y'' + (1 + x^2)y = \cos x;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

16. $y''' + xy'' + (x^2 - x)y = xe^x + 1;$ $y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$

17. $y''' - 2xy = 0;$ $y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = y''(0) = 1.$

18. Показать, что линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами при любых начальных условиях сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода с ядром, зависящим лишь от разности аргументов $(x - t)$ (интегральное уравнение с замкнутым циклом или уравнение свертки).

Некоторые частные виды уравнений Вольтерра 1-го и 2-го родов можно решать, сводя их к дифференциальным уравнениям.

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x xt\varphi(t)\,dt. \tag{11}$$

<u>*Решение*</u>. Перепишем уравнение (11) в следующем виде:

$$\varphi(x) = x\left(1 + \int_0^x t\varphi(t)\,dt\right), \tag{12}$$

и положим

$$y(x) = 1 + \int_0^x t\varphi(t)\,dt. \tag{13}$$

Дифференцируем последнее равенство:

$$y'(x) = x\varphi(x).$$

Но так как согласно (12) и (13)

$$\varphi(x) = xy(x),$$

то получим дифференциальное уравнение относительно функции $y(x)$:

$$y'(x) = x^2 y(x).$$

Общее решение этого уравнения

$$y(x) = Ce^{x^3/3}.$$

Заметим, что в силу (13) имеем $y(0) = 1$ и, следовательно, $C = 1$. Таким образом, решение $\varphi(x) = xy(x)$ уравнения (11) имеет вид

$$\varphi(x) = xe^{x^3/3}.$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

Методом дифференцирования решить следующие интегральные уравнения:

19. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$. **20.** $\int\limits_0^x e^{x+t}\varphi(t)\,dt = x$. **21.** $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x$.

22. $\varphi(x) = 2\int\limits_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2}\,\varphi(t)\,dt + 1$. **23.** $\varphi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt + e^x$.

§ 3. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $K(x,t)$ есть непрерывная функция при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$, а $f(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant a$.

Будем искать решение интегрального уравнения (1) в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{2}$$

Подставляя формально этот ряд в (1), получим

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots =$$
$$= f(x) + \lambda \int\limits_0^x K(x,t)\left[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(t) + \ldots\right] dt.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = f(x),\\
&\varphi_1(x) = \int\limits_0^x K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt = \int\limits_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt,\\
&\varphi_2(x) = \int\limits_0^x K(x,t)\,\varphi_1(t)\,dt = \int\limits_0^x K(x,t)\int\limits_0^t K(t,t_1)\,f(t_1)\,dt_1\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Соотношения (3) дают способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$. Можно показать, что при сделанных предположениях относительно $f(x)$ и $K(x,t)$ полученный таким образом образом ряд (2) сходится равномерно по x и λ при любом λ и $x \in [0,a]$ и его сумма есть единственное решение уравнения (1).

Далее, из (3) следует:

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\, f(t)\, dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)\, f(t_1)\, dt_1\right] dt =$$

$$= \int_0^x f(t_1)\, dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t)\, K(t,t_1)\, dt = \int_0^x K_2(x,t_1)\, f(t_1)\, dt_1,$$

где

$$K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)\, K(t,t_1)\, dt.$$

Аналогично устанавливается, что вообще

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)\, f(t)\, dt \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{4}$$

Функции $K_n(x,t)$ называются *повторными* или *итерированными ядрами*. Они, как нетрудно показать, определяются при помощи рекуррентных формул

$$K_1(x,t) = K(x,t),$$

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_n(z,t)\, dz \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{5}$$

Используя (4) и (5), равенство (2) можно записать так:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \int_0^x K_\nu(x,t)\, f(t)\, dt.$$

Функция $R(x, t; \lambda)$, определяемая при помощи ряда

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K_{\nu+1}(x,t), \tag{6}$$

называется *резольвентой* (или разрешающим ядром) интегрального уравнения (1). Ряд (6) в случае непрерывного ядра $K(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела в интегральном уравнении.

Резольвента $R(x, t; \lambda)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,s)\, R(s,t;\lambda)\, ds.$$

С помощью резольвенты решение интегрального уравнения (1) запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt. \tag{7}$$

Пример 1. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x,t) \equiv 1$.

<u>*Решение*</u>. Имеем $K_1(x,t) = K(x,t) = 1$. Далее, согласно формулам (5)

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_1(z,t)\, dz = \int_t^x dz = x - t,$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x 1 \cdot (z-t)\, dz = \frac{(x-t)^2}{2},$$

$$K_4(x,t) = \int_t^x 1 \cdot \frac{(z-t)^2}{2}\, dz = \frac{(x-t)^3}{3!},$$

....

$$K_n(x,t) = \int_t^x 1 \cdot K_{n-1}(z,t)\, dz = \int_t^x 1 \cdot \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}\, dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, согласно определению

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующими ядрами:

24. $K(x,t) = x - t$. **25.** $K(x,t) = e^{x-t}$. **26.** $K(x,t) = e^{x^2-t^2}$.

27. $K(x,t) = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}$. **28.** $K(x,t) = \dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$. **29.** $K(x,t) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}$.

30. $K(x,t) = a^{x-t}$ $(a > 0)$.

Предположим, что ядро $K(x,t)$ есть многочлен $(n-1)$-й степени относительно t, так что его можно представить в виде

$$K(x,t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \tag{8}$$

причем коэффициенты $a_k(x)$ непрерывны в $[0, a]$. Если определить функцию $g(x, t; \lambda)$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\,g\right] = 0, \tag{9}$$

удовлетворяющее условиям

$$g\big|_{x=t} = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=t} = \ldots = \left.\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\right|_{x=t} = 0, \qquad \left.\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\right|_{x=t} = 1, \tag{10}$$

то резольвента $R(x, t; \lambda)$ будет определяться равенством

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n}. \tag{11}$$

Аналогично в случае, когда

$$K(x,t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1},$$

резольвента

$$R(x,t;\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(t,x;\lambda)}{dt^n},$$

где $g(x, t; \lambda)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \lambda\left[b_0(t)\,\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(t)\,g\right] = 0,$$

удовлетворяющее условиям (10).

Пример 2. Найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Решение. В данном случае $K(x,t) = x - t$, $\lambda = 1$, следовательно, согласно (8), $a_1(x) = 1$, все остальные $a_k(x) = 0$.

Уравнение (9) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 g(x,t;1)}{dx^2} - g(x,t;1) = 0,$$

откуда

$$g(x,t;1) = g(x,t) = C_1(t)\,e^x + C_2(t)e^{-x}.$$

Условия (10) дают

$$\begin{cases} C_1(t)\,e^t + C_2(t)\,e^{-t} = 0, \\ C_1(t)\,e^t - C_2(t)\,e^{-t} = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Решая систему (12), находим

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\,e^{-t}, \quad C_2(t) = -\frac{1}{2}\,e^t,$$

и, следовательно,

$$g(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{x-t} - e^{-(x-t)}\right) = \operatorname{sh}(x-t).$$

Согласно (11)

$$R(x,t;1) = [\operatorname{sh}(x-t)]''_x = \operatorname{sh}(x-t).$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти резольвенты интегральных уравнений со следующими ядрами ($\lambda = 1$):

31. $K(x,t) = 2 - (x-t)$. **32.** $K(x,t) = -2 + 3(x-t)$.

33. $K(x,t) = 2x$. **34.** $K(x,t) = -\dfrac{4x-2}{2x+1} + \dfrac{8(x-t)}{2x+1}$.

35. Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра, ядро которого зависит лишь от разности своих аргументов:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \quad (\lambda = 1). \tag{13}$$

Показать, что для уравнения (13) все повторные ядра и резольвента также зависят лишь от разности $x - t$.

Пример 3. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t)\,dt.$$

Решение. Резольвента ядра $K(x,t) = e^{x^2-t^2}$ при $\lambda = 1$ есть $R(x,t;\,1) = e^{x-t}e^{x^2-t^2}$ (см. задачу 26). Согласно формуле (7) решением данного интегрального уравнения является функция

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t}e^{x^2-t^2}e^{t^2}\,dt = e^{x+x^2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Используя результаты предыдущих задач, найти с помощью резольвент решения следующих интегральных уравнений:

36. $\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

37. $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

38. $\varphi(x) = x3^x - \int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

39. $\varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}\,\varphi(t)\,dt.$

40. $\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$

41. $\varphi(x) = e^{x^2+2x} + 2\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$

42. $\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \dfrac{1+x^2}{1+t^2}\,\varphi(t)\,dt.$

***

Замечание. Однозначная разрешимость интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{14}$$

имеет место при значительно более общих предположениях относительно функции $f(x)$ и ядра $K(x,t)$, нежели их непрерывность.

Теорема. *Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода* (14), *у которого ядра $K(x,t)$ и функция $f(x)$ принадлежат соответственно* *подпространствам $L_2(\Omega_0)$ и $L_2(0, a)$, имеет одно и только одно решение из пространства $L_2(0, a)$.*

Это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^x R(x, t; \lambda)\, f(t)\, dt,$$

где резольвента $R(x, t; \lambda)$ определяется при помощи ряда

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_{\nu+1}(x, t),$$

составленного из итерированных ядер и сходящегося почти всюду.

Задача для самостоятельного решения

43. Показать, что уравнение

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x t^{x-t} \varphi(t)\, dt \quad (0 \leqslant x,\ t \leqslant 1)$$

имеет, кроме непрерывного решения $\varphi(x) \equiv 0$, бесконечное множество разрывных решений вида

$$\varphi(x) = Cx^{x-1},$$

где C — произвольная постоянная.

§ 4. Эйлеровы интегралы

Гамма-функцией или эйлеровым интегралом 2-го рода называется функция $\Gamma(x)$, определяемая равенством

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \tag{1}$$

где x — любое комплексное число, $\operatorname{Re} x > 0$. При $x = 1$ получаем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\, dt = 1. \tag{2}$$

Интегрируя по частям, из равенства (1) находим

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^\infty e^{-t} t^x\, dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{3}$$

Это равенство выражает основное свойство гамма-функции:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4}$$

Используя (2), получаем

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\cdot\Gamma(1) = 1,\\ \Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\cdot\Gamma(2) = 2!,\\ \Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\cdot\Gamma(3) = 3!,\end{aligned}$$

и вообще при целом положительном значении n

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{5}$$

Известно, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Положив в этом равенстве $x = t^{1/2}$, найдем

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{(1/2)-1}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Учитывая выражение (1) для гамма-функции, последнее равенство запишем так:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда с помощью основного свойства гамма-функции, выраженного равенством (4), находим

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},\\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi} \quad \text{и т.д.}\end{aligned}$$

Вообще, как нетрудно убедиться, справедливо равенство

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

(n — целое положительное).

Зная значение гамма-функции при каком-то значении аргумента, можно из равенства (3) вычислить значение этой функции при аргументе, уменьшенном на единицу. Например,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Поэтому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Действуя аналогично, найдем

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi} \quad \text{и т. д.}$$

Нетрудно проверить, что $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \ldots = \Gamma(-n) = \ldots = \infty$. Выше мы определили $\Gamma(x)$ для $\operatorname{Re} x > 0$. Указанный способ вычисления $\Gamma(x)$ продолжает эту функцию в левую полуплоскость, где $\Gamma(x)$ определена всюду, кроме точек $x = -n$ (n — целое положительное и 0).

Отметим еще следующие соотношения:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\pi^{1/2}\Gamma(2x),$$

вообще,

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{(1/2)-nx}\,\Gamma(nx)$$

(*теорема умножения Гаусса и Лежандра*).

Гамма-функция была определена Вейерштрассом посредством уравнени

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}, \tag{6}$$

где

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right) = 0{,}57721\ldots$$

— постоянная Эйлера. Из равенства (6) видно, что функция $\Gamma(z)$ аналитична всюду, за исключением точек $z = 0$, $z = -1$, $z = -2$, ..., где она имеет простые полюсы.

Приведем еще формулу Эйлера, которая получается из (6):

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}.$$

Она имеет место всюду, кроме точек $z = 0$, $z = -1$, $z = -2, \ldots$.

Задачи для самостоятельного решения

44. Показать, что $\Gamma'(1) = -\gamma$.

45. Показать, что $\operatorname{Re} z > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

46. Показать, что

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\ln 2.$$

47. Доказать, что

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}n^{z}.$$

Введем эйлеров интеграл 1-го рода $B(p,q)$, так называемую *бета-функцию*:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (\operatorname{Re} p > 0,\ \operatorname{Re} q > 0).$$

Справедливо следующее равенство, устанавливающее связь между интегралами Эйлера 1-го и 2-го рода:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

48. Показать, что
$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p).$$

49. Показать, что
$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1).$$

50. Показать, что
$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{q}\mathrm{B}(p,q+1).$$

51. Показать, что
$$\int\limits_{-1}^{1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=2^{p+q-1}\mathrm{B}(p,q).$$

52. Вычислить интеграл
$$I=\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^{m-1}x\cdot\sin^{n-1}x\,dx\quad(\operatorname{Re}m>0,\ \operatorname{Re}n>0).$$

§ 5. Интегральное уравнение Абеля и его обобщения

Интегральным уравнением Абеля называется уравнение вида
$$\int\limits_{0}^{x}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=f(x),\tag{1}$$
где $\varphi(x)$ — искомая функция, а $f(x)$ — заданная функция. Это есть интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода.

Уравнением Абеля называют также несколько более общее уравнение:
$$\int\limits_{0}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt=f(x),\tag{2}$$
где α — постоянная, $0<\alpha<1$ (*обобщенное уравнение Абеля*). Функцию $f(x)$ будем считать имеющей непрерывную производную на некотором

отрезке $[0, a]$. Заметим, что при $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ ядро уравнения (2) не интегрируемо с квадратом, т.е. не является L_2-функцией. Однако уравнение (2) имеет решение, которое может быть найдено следующим образом.

Допустим, что решение уравнения (2) существует. Заменим в уравнении x на s, умножим обе части полученного равенства на $\dfrac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ и проинтегрируем по s от 0 до x:

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}\, dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds.$$

Меняя слева порядок интегрирования, получим

$$\int_0^x \varphi(t)\, dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = F(x), \tag{3}$$

где

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds.$$

Во внутреннем интеграле (3) сделаем подстановку $s = t + y(x-t)$:

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha (1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Тогда из уравнения (3) имеем

$$\int_0^x \varphi(t)\, dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F(x),$$

или

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds \right)'_x. \tag{4}$$

Итак, единственное решение уравнения (3) дается формулой (4), которую с помощью интегрирования по частям можно переписать еще в виде

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds \right]. \tag{5}$$

Задачи для самостоятельного решения

53. а) Показать, что в случае $f(x) \equiv C = \text{const}$ решением уравнения Абеля (1) является циклоида. (Задача о таутохроне: найти кривую, скользя вдоль которой без трения, тяжелая частица достигает своего самого низкого положения за одно и то же время независимо от ее начального положения.)

б) Показать, что в случае $f(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$ решением уравнения Абеля будут прямые.

Решить следующие интегральные уравнения:

54. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = x^n \quad (0 < \alpha < 1).$

55. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x.$

56. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = e^x.$

57. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = x^{1/2}.$

58. Решить двумерное уравнение Абеля

$$\iint_D \frac{\varphi(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}} = f(x_0, y_0).$$

Здесь область D — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой на оси OX и с вершиной в точке (x_0, y_0).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)\,dt = x^\lambda \tag{6}$$

($\lambda \geqslant 0$, $\beta > -1$ — вещественное), являющееся в некотором смысле дальнейшим обобщением уравнения Абеля (2).

Умножим обе части (6) на $(z-x)^\mu$ $(\mu > -1)$ и проинтегрируем по x от 0 до z:

$$\int_0^z (z-x)^\mu \left(\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)\,dt \right) dx = \int_0^z x^\lambda (z-x)^\mu\,dx. \tag{7}$$

Полагая в интеграле в правой части (7) $x = \rho z$, получим

$$\int_0^z x^\lambda (z-x)^\mu\,dx = z^{\lambda+\mu+1} \int_0^1 \rho^\lambda (1-\rho)^\mu\,d\rho = z^{\lambda+\mu+1} \mathrm{B}(\lambda+1, \mu+1) =$$

$$= z^{\lambda+\mu+1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} \qquad (\lambda+\mu+1 > \lambda \geqslant 0). \tag{8}$$

Меняя порядок интегрирования в левой части (7), получим

$$\int_0^z \left(\int_0^x (z-x)^\mu (x-t)^\beta \varphi(t)\,dt \right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z (z-x)^\mu (x-t)^\beta\,dx \right) \varphi(t)\,dt. \tag{9}$$

Положим во внутреннем интеграле правой части (9)

$$x = t + \rho(z-t).$$

Тогда

$$\int_t^z (z-x)^\mu (x-t)^\beta\,dx = (z-t)^{\mu+\beta+1} \int_0^1 \rho^\beta (1-\rho)^\mu\,d\rho =$$

$$= (z-t)^{\mu+\beta+1} \mathrm{B}(\beta+1, \mu+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} (z-t)^{\beta+\mu+1}. \tag{10}$$

Учитывая (8), (9), (10), из равенства (7) найдем

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} \int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1} \varphi(t)\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} z^{\lambda+\mu+1}. \tag{11}$$

Выберем μ так, чтобы $\mu+\beta+1 = n$, где n — неотрицательное целое число. Тогда из (11) будем иметь

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^z (z-t)^n \varphi(t)\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta},$$

или

$$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} \varphi(t)\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}. \tag{12}$$

Дифференцируя обе части (12) $n+1$ раз по z, получим

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)\ldots(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda-\beta-1},$$

или для $\lambda-\beta+k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\lambda-\beta)} z^{\lambda-\beta-1}. \tag{13}$$

Это и есть решение интегрального уравнения (6).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^2.$$

Решение. В данном случае $\beta = 1$, $\lambda = 2$. Так как $\lambda - \beta + k \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), то по формуле (13)

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} x^{2-1-1} = 2. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

59. $\displaystyle\int_0^x (x-t)^{1/3}\varphi(t)\,dt = x^{4/3} - x^2.$

60. $\displaystyle\int_0^x (x-t)^{1/2}\varphi(t)\,dt = \pi x.$

61. $\displaystyle\int_0^x (x-t)^{1/4}\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

62. $\displaystyle\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = x^3.$

63. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$

ГЛАВА 2 Интегральные уравнения Фредгольма

§ 6. Уравнения Фредгольма. Основные понятия

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции, x и t — действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b), λ — числовой множитель.

Функция $K(x, t)$ называется *ядром интегрального уравнения* (1); предполагается, что ядро $K(x, t)$ определено в квадрате $\Omega\{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ на плоскости (x, t) и непрерывно в Ω, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx\, dt$$

имеет конечное значение.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным*; если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

и называется *однородным*.

Интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt = f(x), \tag{3}$$

не содержащее искомой функции $\varphi(x)$ вне интеграла, называется *интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода*.

Пре елы интегрирования a и b в уравнениях (1), (2) и (3) могут быть как конечными, так и бесконечными.

Решением интегральных уравнений (1), (2) и (3) называется любая функция $\varphi(x)$, при подстановке которой в уравнения последние обращаются в тождества относительно $x \in (a, b)$.

Пример 1. Задача о распределении яркости света.

Согласно закону геометрической оптики изображение объекта подобно самому объекту, так что отрезок отображается в отрезок, причем длины этих отрезков, вообще говоря, различны.

При заданной системе линз в приборе P выберем масштабы на осях Ot и $O's$ так, чтобы для двух взаимно соответствующих точек $T(t)$ и $S(s)$ имело место равенство $s = t$ (рис. 1).

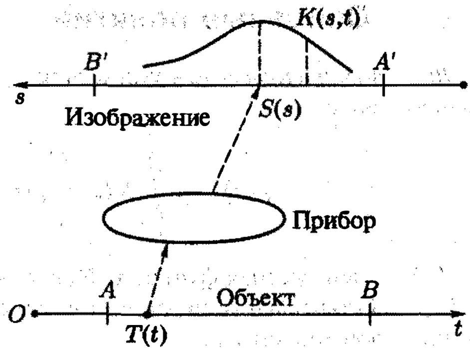

Рис. 1

Светящаяся точка $T(t)$ объекта AB влияет на освещение всего изображения $A'B'$, причем наибольшая яркость освещения приходится на точку $S(s)$. Таким образом, интенсивность освещения K (т. е. яркость света) является функцией s и t, т.е. $K = K(s, t)$.

Обозначим через $\eta(t)$ плотность яркости объекта. Тогда величина

$$\eta(t)K(s,t)\Delta t$$

будет давать приближеиное значение яркости изображения в точке $S(s)$, порождаемого элементом Δt светящегося объекта. Здесь величина $K(s, t)$ определяется свойствами оптического прибора. Яркость изображения в точке $S(s)$, в силу принципа суперпозиции, приближенно выразится суммой

$$\sum_k \eta(t_k)K(s, t_k)\Delta t_k, \tag{4}$$

где суммирование распространяется по всему объекту — отрезку AB. Пусть длина отрезка AB равна l. Переходя в сумме (4) к пределу при $\max \Delta t_k \to 0$, получим распределение яркости изображения в виде

$$g(s) = \int_0^l K(s, t)\eta(t)\, dt. \tag{5}$$

В зависимости от различных постановок физической задачи из (5) получаем различные виды интегральных уравнений. Функция $K(s, t)$ является известной функцией, определяемой выбором оптического прибора. Если плотность яркости изображения $g(s)$ задана, а ищется такое распределение яркости объекта, которое дает заданную яркость изображения, тогда $g(s)$ будет данной функцией, а $\eta(s)$ — искомой, и, следовательно, (5) будет интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода.

Большое физическое значение имеет вопрос: когда изображение таково, что, кроме геометрического подобия, яркость изображения также подобна яркости объекта? В этом случае $g(s)$ и $\eta(s)$ пропорциональны, т. е.

$$g(s) = \frac{1}{\lambda}\eta(s),$$

и (5) превращается (если написать $\varphi(s)$ вместо $g(s)$) в

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_0^l K(s,t)\varphi(t)\,dt,$$

т. е. в однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, в котором $\varphi(s)$ является искомой функцией. При этом возникает вопрос: может ли коэффициент пропорциональности принимать любые значения, или же, если это не так, то для каких значений λ физическая задача имеет решение?

Если изменить физическую постановку вопроса и потребовать, чтобы разница яркости между точкой объекта и точкой изображения имела всюду заранее заданную величину $f(s)$, т. е. чтобы

$$\eta(s) - g(s) = f(s), \qquad (6)$$

то (5), после замены в нем $g(s)$ из (6), переходит в

$$f(s) = \eta(s) - \int_0^l K(s,t)\eta(t)\,dt$$

— неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Здесь искомой функцией является $\eta(s)$. ▷

Пример 2. Показать, что функция $\varphi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ является решением интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x}{2},$$

где ядро имеет вид

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\[2mm] \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Левую часть уравнения запишем в виде

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt + \int_x^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt\right\} =$$

$$= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{ \int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\,\varphi(t)\,dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\,\varphi(t)\,dt \right\} =$$

$$= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{ \frac{2-x}{2} \int_0^x t\,\varphi(t)\,dt + \frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\,\varphi(t)\,dt \right\}.$$

Подставляя в полученное выражение вместо $\varphi(x)$ функцию $\sin\frac{\pi x}{2}$, будем иметь

$$\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left\{ (2-x)\int_0^x t\,\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt + x\int_x^1 (2-t)\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt \right\} =$$

$$= \sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left\{ (2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} + \right.$$

$$\left. + x\left[-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right]\Bigg|_{t=x}^{t=1} \right\} = \frac{x}{2}.$$

Итак, получаем $\frac{x}{2} \equiv \frac{x}{2}$, а это означает, согласно определению, что $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ есть решение данного интегрального уравнения. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, какие из данных функций являются решениями указанных интегральных уравнений.

64. $\varphi(x) = 1, \quad \varphi(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\,\varphi(t)\,dt = e^x - x.$

65. $\varphi(x) = 2e^x\left(x - \frac{1}{3}\right), \quad \varphi(x) + 2\int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)\,dt = 2xe^x.$

66. $\varphi(x) = 1 - \frac{2\sin x}{1 - \frac{\pi}{2}}, \quad \varphi(x) - \int_0^\pi \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt = 1.$

67. $\varphi(x) = \sqrt{x}, \quad \varphi(x) - \int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \sqrt{x} + \frac{x}{15}(4x^{3/2} - 7),$

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\[2mm] \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

68. $\varphi(x) = e^x$, $\quad \varphi(x) + \lambda \int\limits_0^1 \sin xt\, \varphi(t)\, dt = 1.$

69. $\varphi(x) = \cos x$, $\quad \varphi(x) - \int\limits_0^\pi (x^2 + t) \cos t\, \varphi(t)\, dt = \sin x.$

70. $\varphi(x) = xe^{-x}$, $\quad \varphi(x) - 4 \int\limits_0^\infty e^{-(x+t)} \varphi(t)\, dt = (x-1)e^{-x}.$

71. $\varphi(x) = \cos 2x$, $\quad \varphi(x) - 3 \int\limits_0^\pi K(x,t)\, \varphi(t)\, dt = \cos x,$

$$K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

72. $\varphi(x) = \dfrac{4C}{\pi} \sin x$, где C — произвольная постоянная,

$$\varphi(x) - \frac{4}{\pi} \int\limits_0^\infty \sin x \,\frac{\sin^2 t}{t}\, \varphi(t)\, dt = 0.$$

§ 7. Метод определителей Фредгольма

Решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{1}$$

дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\, dt, \tag{2}$$

где функция $R(x,t;\lambda)$, называемая *резольвентой Фредгольма* уравнения (1), определяется равенством

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{3}$$

при условии, что $D(\lambda) \neq 0$. Здесь $D(x, t; \lambda)$ и $D(\lambda)$ — степенные ряды по λ:

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t)\lambda^n, \tag{4}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n\lambda^n, \tag{5}$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & \dots & K(t_2,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n, \tag{6}$$

причем

$$B_0(x, t) = K(x, t);$$

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \dots & K(t_2,t_n) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & \dots & K(t_3,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \tag{7}$$

Функция $D(x, t; \lambda)$ называется *минором Фредгольма*, а $D(\lambda)$ — *определителем Фредгольма*. В случае, когда ядро $K(x, t)$ ограничено или же интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt$$

имеет конечное значение, ряды (4) и (5) сходятся для всех значений λ и, значит, являются целыми аналитическими функциями от λ.

Резольвента

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

есть аналитическая функция от λ, кроме тех значений λ, которые являются нулями функции $D(\lambda)$. Последние суть полюсы резольвенты $R(x, t; \lambda)$.

Пример 1. С помощью определителей Фредгольма найти резольвенту ядра $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

Решение. Имеем $B_0(x,t)=xe^t$. Далее,

$$B_1(x,t)=\int_0^1\begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1}\\ t_1e^t & t_1e^{t_1}\end{vmatrix}dt_1=0,$$

$$B_2(x,t)=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2}\\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2}\\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}dt_1\,dt_2=0,$$

так как определители под знаком интеграла равны нулю. Очевидно, что и все последующие $B_n(x,t)=0$. Находим коэффициенты C_n:

$$C_1=\int_0^1 K(t_1,t_1)\,dt_1=\int_0^1 t_1e^{t_1}\,dt_1=1,$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2}\\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}dt_1\,dt_2=0.$$

Очевидно, что и все последующие $C_n=0$.

Согласно формулам (4) и (5) в нашем случае имеем

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)=xe^t;\quad D(\lambda)=1-\lambda.$$

Таким образом,

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{xe^t}{1-\lambda}.$$

Применим полученный результат к решению интегрального уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xe^t\varphi(t)\,dt=f(x)\quad(\lambda\neq 1).$$

Согласно формуле (2)

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{xe^t}{1-\lambda}f(t)\,dt.$$

В частности, для $f(x)=e^{-x}$ получаем

$$\varphi(x)=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\,x.$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

73. Показать, что для уравнения

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_0^1 xt\varphi(t)\,dt$$

определитель Фредгольма

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3},$$

а минор Фредгольма

$$D(x, t; \lambda) = xt.$$

74. Показать, что для уравнения

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2)\varphi(t)\,dt$$

имеем

$$D(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2, \quad D(x, t; \lambda) = xt + t^2 + \lambda\left(\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{3}xt - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4}t\right).$$

75. Показать, что если

$$K(x, t) = f_1(x)f_2(t) \quad \text{и} \quad \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx = A,$$

то

$$D(\lambda) = 1 - \lambda A, \quad D(x, t; \lambda) = f_1(x)f_2(t)$$

и решение соответствующего неоднородного интегрального уравнения с правой частью $f(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - \lambda A} \int_a^b f(t)f_2(t)\,dt.$$

76. Показать, что если

$$K(x, t) = f_1(x)g_1(t) + f_2(x)g_2(t),$$

то $D(\lambda)$ будет полиномом второй степени относительно λ; вообще, если

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)g_m(t),$$

то $D(\lambda)$ будет полиномом n-й степени относительно λ.

Пользуясь определителями Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер:

77. $K(x, t) = 2x - t$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

78. $K(x, t) = x^2t - xt^2$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

79. $K(x, t) = \sin x \cos t$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

80. $K(x, t) = \sin x - \sin t$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

Вычисление по формулам (6) и (7) коэффициентов $B_n(x,t)$ и C_n рядов (4) и (5) практически возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n\int_a^b K(x,s)B_{n-1}(s,t)\,ds, \tag{8}$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)\,ds. \tag{9}$$

Зная, что коэффициент $C_0 = 1$ и $B_0(x,t) = K(x,t)$, по формулам (9) и (8) найдем последовательно C_1, $B_1(x,t)$, C_2, $B_2(x,t)$, C_3 и т. д.

Пример 2. Пользуясь формулами (8) и (9), найти резольвенту ядра $K(x,t) = x - 2t$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Решение. Имеем $C_0 = 1$, $B_0(x,t) = x - 2t$. Пользуясь формулой (9), найдем

$$C_1 = \int_0^1 (-s)\,ds = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (8) получим

$$B_1(x,t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)\,ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}.$$

Далее будем иметь

$$C_2 = \int_0^1 \left(-2s + 2s^2 + \frac{2}{3}\right) ds = \frac{1}{3},$$

$$B_2(x,t) = \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)\left(-s - t + 2st + \frac{2}{3}\right) ds = 0,$$

$$C_3 = C_4 = \ldots = 0, \quad B_3(x,t) = B_4(x,t) = \ldots = 0.$$

Следовательно,

$$D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}; \quad D(x,t;\lambda) = x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda.$$

Резольвента данного ядра будет

$$R(x,t;\lambda) = \frac{x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}.$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

Используя рекуррентные соотношения (8) и (9), найти резольвенты следующих ядер:

81. $K(x,t) = x + t + 1;\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$

82. $K(x,t) = 1 + 3xt;\quad -0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

83. $K(x,t) = 4xt - x^2;\quad -0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

84. $K(x,t) = e^{x-t};\quad -0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

85. $K(x,t) = \sin(x+t);\quad -0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

86. $K(x,t) = x - \operatorname{sh} t;\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$

С помощью резольвенты решить следующие интегральные уравнения:

87. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin(x+t)\,\varphi(t)\,dt = 1.$

88. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} (2x - t)\,\varphi(t)\,dt = \dfrac{x}{6}.$

89. $\varphi(x) - \int\limits_0^{2\pi} \sin x \cos t\,\varphi(t)\,dt = \cos 2x.$

90. $\varphi(x) + \int\limits_0^{1} e^{x-t}\varphi(t)\,dt = e^x.$

91. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} (4xt - x^2)\varphi(t)\,dt = x.$

§ 8. Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Как и в случае уравнений Вольтерра, интегральное уравнение (1) можно решать методом последовательных приближений. Для этого полагаем

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\lambda^n, \tag{2}$$

где $\psi_n(x)$ определяются по формулам

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\, \psi_1(t)\, dt = \int_a^b K_2(x,t)\, f(t)\, dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x,t)\, \psi_2(t)\, dt = \int_a^b K_3(x,t)\, f(t)\, dt \quad \text{и т.д.}$$

Здесь

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z)\, K_1(z,t)\, dz, \qquad K_3(x,t) = \int_a^b K(x,z)\, K_2(z,t)\, dz,$$

и вообще

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)\, K_{n-1}(z,t)\, dz, \tag{3}$$

$n = 2, 3, \ldots$, причем $K_1(x,t) \equiv K(x,t)$. Функции $K_n(x,t)$, определяемые по формулам (3), называются *итерированными ядрами*. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s)\, K_{n-m}(s,t)\, ds, \tag{4}$$

где m — любое натуральное число, меньшее n.

Резольвента интегрального уравнения (1) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1}, \tag{5}$$

где ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана ядра* $K(x,t)$. Он сходится для

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{6}$$

где

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\, dx\, dt}.$$

Решение уравнения Фредгольма 2-го рода (1) выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x, t; \lambda) f(t)\, dt. \tag{7}$$

Граница (6) является существенной для сходимости ряда (5). Однако решение уравнения (1) может существовать и для значений $|\lambda| > \dfrac{1}{B}$.

Рассмотрим пример:

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 \varphi(t)\, dt = 1. \tag{8}$$

Здесь $K(x, t) \equiv 1$, и, следовательно,

$$B^2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 K^2(x, t)\, dx\, dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 dx\, dt = 1.$$

Таким образом, условие (6) дает, что ряд (5) сходится при $|\lambda| < 1$.

Решая уравнение (8) как уравнение с вырожденным ядром (см. § 9), получим $(1 - \lambda) C = 1$, где $C = \int\limits_0^1 \varphi(t)\, dt$. При $\lambda = 1$ это уравнение неразрешимо, а значит, при $\lambda = 1$ интегральное уравнение (8) решения не имеет. Отсюда следует, что в круге радиуса, большего единицы, последовательные приближения для уравнения (8) не могут сходиться. Однако при $|\lambda| > 1$ уравнение (8) разрешимо. В самом деле, если $\lambda \neq 1$, то функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{1 - \lambda}$ является решением данного уравнения, что легко проверить непосредственной подстановкой.

Для некоторых уравнений Фредгольма ряд Неймана (5) для резольвенты сходится при любых значениях λ. Покажем это.

Пусть имеем два ядра: $K(x, t)$ и $L(x, t)$. Будем называть эти ядра *ортогональными*, если выполняются два условия:

$$\int\limits_a^b K(x, z)\, L(z, t)\, dz = 0, \qquad \int\limits_a^b L(x, z)\, K(z, t)\, dz = 0 \tag{9}$$

при любых допустимых значениях x и t.

Например, ядра $K(x, t) = xt$ и $L(x, t) = x^2 t^2$ ортогональны на $[-1, 1]$. В самом деле,

$$\int\limits_{-1}^1 (xz)(z^2 t^2)\, dz = xt^2 \int\limits_{-1}^1 z^3 dz = 0, \qquad \int\limits_{-1}^1 (x^2 z^2)(zt)\, dz = x^2 t \int\limits_{-1}^1 z^3 dz = 0.$$

Существуют также ядра, ортогональные самим себе. Для таких ядер $K_2(x,t) \equiv 0$, где $K_2(x,t)$ — второе итерированное ядро. В этом случае, очевидно, все последующие итерированные ядра также равны нулю, и резольвента совпадает с ядром $K(x,t)$.

Пример. $K(x,t) = \sin(x-2t)$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(x+2t-3z)-\cos(x-2t-z)]\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3z)+\sin(x-2t-z)\right]\Bigg|_{z=0}^{z=2\pi} = 0.$$

Таким образом, в этом случае резольвента ядра равна самому ядру:

$$R(x,t;\lambda) \equiv \sin(x-2t),$$

так что ряд Неймана (5) состоит из одного члена и, очевидно, сходится при любом λ.

Итерированные ядра $K_n(x,t)$ можно непосредственно выразить через данное ядро $K(x,t)$ по формуле

$$K_n(x,t) = \int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,s_1)K(s_1,s_2)\ldots K(s_{n-1},t)\,ds_1ds_2\ldots ds_{n-1}. \tag{10}$$

Все итерированные ядра $K_n(x,t)$, начиная с $K_2(x,t)$, будут непрерывными функциями в квадрате Ω $\{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, если начальное ядро $K(x,t)$ суммируемо с квадратом в Ω.

Если данное ядро $K(x,t)$ симметрично, то все итерированные ядра $K_n(x,t)$ тоже симметричны. ▷

Приведем примеры отыскания итерированных ядер.

Пример 1. Найти итерированные ядра для ядра $K(x,t) = x-t$, если $a=0$, $b=1$.

<u>*Решение*</u>. Пользуясь формулами (3), найдем последовательно:

$$K_1(x,t) = x-t,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right)ds = -\frac{x-t}{12},$$

$$K_4(x,t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds = -\frac{1}{12}K_2(x,t) = -\frac{1}{12}\left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right),$$

$$K_5(x,t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right) ds = -\frac{1}{12} K_3(x,t) = \frac{x-t}{12^2},$$

$$K_6(x,t) = \frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-s)(s-t)\, ds = \frac{K_2(x,t)}{12^2} = \frac{1}{12^2}\left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right).$$

Отсюда следует, что итерированные ядра имеют вид:

1) для $n = 2k-1$

$$K_{2k-1}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t);$$

2) для $n = 2k$

$$K_{2k}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right),$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$. ▷

Пример 2. Найти итерированные ядра $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$, если $K(x,t) = e^{\min(x,t)}$, $a = 0$, $b = 1$.

Решение. По определению имеем

$$\min\{x,t\} = \begin{cases} x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t, & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

поэтому данное ядро можно записать в виде

$$K(x,t) = \begin{cases} e^x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ e^t, & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Это ядро, как легко проверить, является симметричным, т. е.

$$K(x,t) = K(t,x).$$

Имеем $K_1(x,t) = K(x,t)$. Находим второе итерированное ядро:

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)\, K_1(s,t)\, ds = \int_0^1 K(x,s)\, K(s,t)\, ds.$$

Здесь

$$K(x,s) = \begin{cases} e^x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ e^s, & \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$K(s,t) = \begin{cases} e^s, & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ e^t, & \text{если} \quad t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Так как данное ядро $K(x,t)$ симметрично, то достаточно найти $K_2(x,t)$ только при $x > t$.

Имеем (рис. 2)

$$K_2(x,t) = \int_0^t K(x,s)\,K(s,t)\,ds + \int_t^x K(x,s)\,K(s,t)\,ds + \int_x^1 K(x,s)\,K(s,t)\,ds.$$

В интервале $(0,t)$ имеем $s<t<x$, поэтому

$$\int_0^t K(x,s)\,K(s,t)\,ds = \int_0^t e^s e^s\,ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t}-1}{2}.$$

В интервале (t,x) имеем $t<s<x$, поэтому

$$\int_t^x K(x,s)\,K(s,t)\,ds = \int_t^x e^s e^t\,ds = e^{x+t} - e^{2t}.$$

В интервале $(x,1)$ имеем $s>x>t$, поэтому

$$\int_x^1 K(x,s)K(s,t)\,ds = \int_x^1 e^x e^t\,ds = (1-x)e^{x+t}.$$

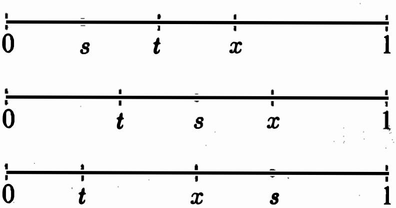

Рис. 2

Складывая найденные интегралы, получим

$$K_2(x,t) = (2-x)e^{x+t} - \frac{1+e^{2t}}{2} \quad (x>t).$$

Выражение для $K_2(x,t)$ при $x<t$ мы найдем, если поменяем местами аргументы x и t в выражении $K_2(x,t)$ для $x>t$:

$$K_2(x,t) = (2-t)e^{x+t} - \frac{1+e^{2x}}{2} \quad (x<t).$$

Итак, второе итерированное ядро имеет вид

$$K_2(x,t) = \begin{cases} (2-t)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2x}}{2}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (2-x)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2t}}{2}, & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$ ▷

Замечание. Если ядро $K(x,t)$, задаваемое в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ разными аналитическими выражениями, не является симметричным, то следует отдельно рассмотреть случай $x<t$. При $x<t$ будем иметь (рис. 3)

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s)\,K(s,t)\,ds = \int_a^x + \int_x^t + \int_t^b.$$

Пример 3. Найти итерированные ядра $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$, если $a=0$, $b=1$ и

$$K(x,t)=\begin{cases} x+t, & \text{если} \quad 0\leqslant x<t,\\ x-t, & \text{если} \quad t<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Решение. Имеем $K_1(x,t)=K(x,t)$,

$$K_2(x,t)=\int\limits_0^1 K(x,s)\,K(s,t)\,ds,$$

где

$$K(x,s)=\begin{cases} x+s, & \text{если} \quad 0\leqslant x<s,\\ x-s, & \text{если} \quad s<x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$K(s,t)=\begin{cases} s+t, & \text{если} \quad 0\leqslant s<t,\\ s-t, & \text{если} \quad t<s\leqslant 1.\end{cases}$$

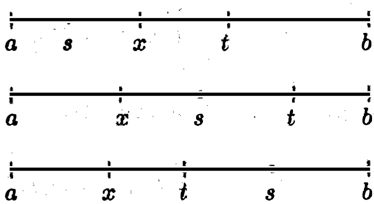

Рис. 3

Так как данное ядро $K(x,t)$ не симметрично, то при нахождении $K_2(x,t)$ рассмотрим отдельно два случая: 1) $x<t$ и 2) $x>t$.

1) Пусть $x<t$. Тогда (см. рис. 3)

$$K_2(x,t)=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int\limits_0^x (x-s)(s+t)\,ds=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2t}{2},$$

$$I_2=\int\limits_x^t (x+s)(s+t)\,ds=\frac{5t^3}{6}-\frac{5x^3}{6}+\frac{3}{2}xt^2-\frac{3}{2}x^2t,$$

$$I_3=\int\limits_t^1 (x+s)(s-t)\,ds=\frac{t^3}{6}+\frac{xt^2}{2}-xt+\frac{x}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}.$$

Складывая эти интегралы, получим

$$K_2(x,t)=t^3-\frac{2}{3}x^3-x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3} \quad (x<t).$$

2) Пусть $x>t$. Тогда (см. рис. 2)

$$K_2(x,t)=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^t (x-s)(s+t)\,ds = \frac{3}{2}xt^2 - \frac{5t^3}{6},$$

$$I_2 = \int\limits_t^x (x-s)(s-t)\,ds = \frac{x^3}{6} - \frac{t^3}{6} - \frac{x^2t}{2} + \frac{xt^2}{2},$$

$$I_3 = \int\limits_x^1 (x+s)(s-t)\,ds = -\frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2t + \frac{x-t}{2} - xt + \frac{1}{3}.$$

Складывая эти интегралы, получим

$$K_2(x,t) = -\frac{2}{3}x^3 - t^3 + x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3} \quad (x > t).$$

Итак, второе итерированное ядро имеет вид

$$K_2(x,t) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + t^3 - x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & 0 \leqslant x < t, \\ -\frac{2}{3}x^3 - t^3 + x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Аналогично находятся и остальные итерированные ядра $K_n(x,t)$ $(n = 3, 4, \ldots)$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти итерированные ядра указанных ниже ядер при заданных a и b.

92. $K(x,t) = x - t$; $a = -1,\ b = 1$.

93. $K(x,t) = \sin(x-t)$; $a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$ $(n = 2, 3)$.

94. $K(x,t) = (x-t)^2$; $a = -1,\ b = 1$ $(n = 2, 3)$.

95. $K(x,t) = x + \sin t$; $a = -\pi,\ b = \pi$.

96. $K(x,t) = xe^t$; $a = 0,\ b = 1$.

97. $K(x,t) = e^x \cos t$; $a = 0,\ b = \pi$.

В следующих задачах найти $K_2(x,t)$:

98. $K(x,t) = e^{|x-t|}$; $a = 0,\ b = 1$.

99. $K(x,t) = e^{|x|+t}$; $a = -1,\ b = 1$.

Приведем пример построения резольвенты интегрального уравнения с помощью итерированных ядер.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{11}$$

Здесь $K(x,t) = xt$; $a = 0$, $b = 1$. Последовательно находим:

$$K_1(x,t) = xt,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x,t) = \frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$K_n(x,t) = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Согласно формуле (5)

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1} = xt\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda},$$

где $|\lambda| < 3$.

В силу формулы (7) решение интегрального уравнения (11) запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t)\,dt.$$

В частности, при $f(x) = x$ получим

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda},$$

где $\lambda \neq 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Построить резольвенты для следующих ядер:

100. $K(x,t) = e^{x+t}$; $a = 0$, $b = 1$.

101. $K(x,t) = \sin x\cos t$; $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$.

102. $K(x,t) = xe^t$; $a = -1$, $b = 1$.

103. $K(x,t) = (1+x)(1-t)$; $a=-1$, $b=0$.

104. $K(x,t) = x^2t^2$; $a=-1$, $b=1$.

105. $K(x,t) = xt$; $a=-1$, $b=1$.

Если $M(x,t)$ и $N(x,t)$ — два ортогональных ядра, то резольвента $R(x, t; \lambda)$, соответствующая ядру $K(x,t) = M + N$, равна сумме резольвент $R_1(x, t; \lambda)$ и $R_2(x, t; \lambda)$, соответствующих каждому из этих ядер.

Пример 4. Найти резольвенту для ядра

$$K(x,t) = xt + x^2t^2, \quad a=-1, \quad b=1.$$

Решение. Как было показано выше, ядра $M(x,t) = xt$ и $N(x,t) = x^2t^2$ ортогональны на $[-1, 1]$ (см. с. 41). Поэтому резольвента ядра $K(x,t)$ равна сумме резольвент ядер $M(x,t)$ и $N(x,t)$. Используя результаты задач 104 и 105, находим

$$R_K(x,t;\lambda) = R_M(x,t;\lambda) + R_N(x,t;\lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda} + \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda},$$

где $|\lambda| < \frac{3}{2}$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти резольвенты для ядер:

106. $K(x,t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$; $a=0$, $b=2\pi$.

107. $K(x,t) = 1 + (2x-1)(2t-1)$; $a=0$, $b=1$.

Указанное свойство можно распространить на любое конечное число ядер.

Если ядра $M^{(1)}(x,t), M^{(2)}(x,t), \ldots, M^{(n)}(x,t)$ попарно ортогональны, то резольвента, соответствующая их сумме

$$K(x,t) = \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(x,t),$$

равна сумме резольвент, соответствующих каждому из слагаемых.

Назовем n-м *следом* ядра $K(x,t)$ величину

$$A_n = \int_a^b K_n(x,x)\,dx \quad (n = 1, 2\ldots), \tag{12}$$

где $K_n(x,t)$ — n-е итерированное ядро для ядра $K(x,t)$.

Имеет место следующая формула для определителя Фредгольма $D(\lambda)$:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}. \tag{13}$$

Радиус сходимости степенного ряда (13) равен наименьшему из модулей характеристических чисел.

Задачи для самостоятельного решения

108. Показать, что для уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

определитель Фредгольма $D(\lambda) = e^{-A_1\lambda}$, и, следовательно, резольвента для уравнения Вольтерра есть целая аналитическая функция от λ.

109. Пусть $R(x,t;\lambda)$ есть резольвента некоторого ядра $K(x,t)$.
Показать, что резольвента уравнения

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b R(x,t;\lambda)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

равна $R(x,t;\lambda+\mu)$.

110. Пусть

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt = B^2, \qquad \int_a^b\int_a^b K_n^2(x,t)\,dx\,dt = B_n^2,$$

где $K_n(x,t)$ — n-е итерированное ядро для ядра $K(x,t)$. Доказать, что если $B_2 = B^2$, то для любого n будет $B_n = B^n$.

§ 9. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода называется *вырожденным*, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от x на функции только от t, т. е. если оно имеет вид

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t); \tag{1}$$

функции $a_k(x)$ и $b_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будем считать непрерывными в основном квадрате $a \leqslant x,\ t \leqslant b$ и линейно независимыми между собой. Интегральное уравнение с вырожденным ядром (1)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)\right] \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{2}$$

решается следующим образом.

Перепишем (2) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\, dt \tag{3}$$

и введем обозначения

$$\int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\, dt = C_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда (3) примет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{5}$$

где C_k — неизвестная постоянная (так как функция $\varphi(x)$ неизвестна).

Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к нахождению постоянных C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Подставляя выражение (5) в интегральное уравнение (2), после несложных выкладок получим

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0.$$

В силу линейной независимости функций $a_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ отсюда следует, что

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt = 0,$$

или

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt = \int_a^b b_m(t) f(t)\, dt \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Вводя для краткости записи обозначения

$$a_{km} = \int\limits_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt, \qquad f_m = \int\limits_a^b b_m(t)\, f(t)\, dt,$$

получим, что

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{km} C_k = f_m \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

или в развернутом виде:

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \ldots - \lambda a_{1n}C_n = f_1, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1 - \lambda a_{22})C_2 - \ldots - \lambda a_{2n}C_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \ldots + (1 - \lambda a_{nn})C_n = f_n. \end{cases} \tag{6}$$

Для нахождения неизвестных C_k имеем линейную систему из n алгебраических уравнений с n неизвестными. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то система (6) имеет единственное решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, получаемое по формулам Крамера

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \ldots & -\lambda a_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+1} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & \ldots & -\lambda a_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Решением интегрального уравнения (2) будет функция $\varphi(x)$, определенная равенством

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$$

где коэффициенты C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются по формулам (8).

Замечание. Систему (6) можно получить, если обе части равенства (5) последовательно умножить на $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ и проинтегрировать в пределах от a до b, либо же подставить выражение (5) для $\varphi(x)$ в равенство (4), заменив x на t.

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t)\varphi(t)\, dt = x. \tag{9}$$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos t\, dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2\varphi(t)\, dt + \lambda\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin t\, dt + x.$$

Введем обозначения:

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos t\, dt; \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\varphi(t)\, dt; \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin t\, dt, \tag{10}$$

где C_1, C_2, C_3 — неизвестные постоянные. Тогда (9) примет вид

$$\varphi(x) = C_1\lambda x + C_2\lambda\sin x + C_3\lambda\cos x + x. \tag{11}$$

Подставляя выражение (11) в равенства (10), получим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\cos t\, dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\, t^2\, dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\sin t\, dt,$$

или

$$C_1\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\, dt\right) - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\cos t\, dt - C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\, dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^3\, dt + C_2\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin t\, dt\right) - C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^3\, dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\, dt - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt + C_3\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\sin t\, dt\right) = \int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\, dt.$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_3 = 0, \\ C_2 + 4\lambda\pi C_3 = 0, \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 = 2\pi. \end{cases} \tag{12}$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Система (12) имеет единственное решение

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}; \quad C_2 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}; \quad C_3 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 в (11), получим решение данного интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x) + x. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

111. $\varphi(x) - 4\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, \varphi(t)\, dt = 2x - \pi.$ **112.** $\varphi(x) - \int\limits_{-1}^{1} e^{\arcsin x} \varphi(t)\, dt = \operatorname{tg} x.$

113. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} t\, \varphi(t)\, dt = \operatorname{ctg} x.$ **114.** $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 \cos(q\ln t)\, \varphi(t)\, dt = 1.$

115. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 \arccos t\, \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

116. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^p \varphi(t)\, dt = 1 \quad (p > -1).$

117. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 (x\ln t - t\ln x)\, \varphi(t)\, dt = \frac{6}{5}(1 - 4x).$

118. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos t\, \varphi(t)\, dt = \sin x.$ **119.** $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{2\pi} |\pi - t|\sin x\, \varphi(t)\, dt = x.$

120. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{\pi} \sin(x - t)\, \varphi(t)\, dt = \cos x.$

121. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} (\sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t)\,\varphi(t)\,dt = \cos x.$

122. $\varphi(x) - \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \left[x - \frac{1}{2}(3t^2 - 1) + \frac{1}{2}t(3x^2 - 1)\right] \varphi(t)\,dt = 1.$

§ 10. Характеристические числа и собственные функции

Однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{1}$$

всегда имеет очевидное решение $\varphi(x) \equiv 0$, которое называют *нулевым* (*тривиальным*) решением.

Значения параметра λ, при которых это уравнение имеет ненулевые решения $\varphi(x) \not\equiv 0$, называются *характеристическими числами*[1] уравнения (1) или ядра $K(x,t)$, а каждое ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ.

Число $\lambda = 0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda = 0$ из (1) следует, что $\varphi(x) \equiv 0$.

Пример. Критическая скорость вала.

Известно, что при некоторой величине скорости вращения вала, которая называется критической, вал начинает колебаться около своей продольной оси.

Для определения критических скоростей вала используется следующий факт из теории упругих балок: для любой упругой балки при произвольных условиях на ее концах всегда существует функция влияния $G(x,\xi)$, описывающая отклонение балки в данном направлении, например, в направлении оси Oy (рис. 4), в произвольной точке $M(x)$ балки, вызванное единичной нагрузкой, приложенной в другой точке $N(\xi)$ балки и действующей в выбранном направлении.

Вследствие принципа взаимности Бетти—Максвелла в теории упругости функция влияния $G(x,\xi)$ является симметричной, т. е.

$$G(x,\xi) = G(\xi,x).$$

[1] В отличие от характеристического числа, будем называть *собственным значением* величину $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, где λ — характеристическое число.

Пусть $p(x)$ есть непрерывное распределение нагрузки вдоль балки. Тогда нагрузка между x и $x+dx$ равна $p(x)\,dx$. Из принципа суперпозиции в теории упругости следует, что отклонение оси балки от положения равновесия выразится так:

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi)p(\xi)\,d\xi \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

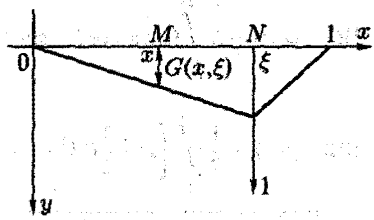

Рис. 4

В случае вращающегося вокруг оси Ox с угловой скоростью ω вала с линейной плотностью $\mu(x)$ распределение нагрузки будет

$$p(x) = \omega^2\mu(x)y(x),$$

где $y(x)$ есть отклонение центра тяжести сечения, соответствующего координате x.

Подставляя выражение для $p(x)$ в полученное уравнение, будем иметь

$$y(x) = \omega^2 \int\limits_0^1 G(x,\xi)\mu(\xi)y(\xi)\,d\xi \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

или, обозначая $\omega^2 = \lambda$,

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)\mu(\xi)y(\xi)\,d\xi \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Таким образом, задача о нахождении критической скорости вращающегося вала свелась к нахождению значений λ, при которых последнее уравнение имеет ненулевое решение. ▷

Если ядро $K(x,t)$ непрерывно в квадрате $\Omega\,\{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$ или суммируемо с квадратом в Ω, причем числа a и b конечные, то каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число линейно независимых собственных функций; число таких функций называется *рангом* характеристического числа. Разные характеристические числа могут иметь разные ранги.

Для уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t)\right] \varphi(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

характеристические числа являются корнями алгебраического уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

степень которого $p \leqslant n$. Здесь $\Delta(\lambda)$ — определитель однородной линейной системы

$$\begin{cases} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \ldots - \lambda a_{1n}C_n = 0, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})C_2 - \ldots - \lambda a_{2n}C_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \ldots + (1-\lambda a_{nn})C_n = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где величины a_{mk} и C_m $(k, m = 1, 2, \ldots, n)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе.

Если уравнение (3) имеет p корней $(1 \leqslant p \leqslant n)$, то интегральное уравнение (2) имеет p характеристических чисел; каждому характеристическому числу λ_m $(m = 1, 2, \ldots, p)$ соответствует ненулевое решение

$$\begin{gathered} C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots, C_n^{(1)} \to \lambda_1, \\ C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \ldots, C_n^{(2)} \to \lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^{(p)}, C_2^{(p)}, \ldots, C_n^{(p)} \to \lambda_p \end{gathered}$$

системы (4). Соответствующие этим решениям ненулевые решения интегрального уравнения (2), т. е. собственные функции, будут иметь вид

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} a_k(x), \quad \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(2)} a_k(x), \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \varphi_p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(p)} a_k(x).$$

Интегральное уравнение с вырожденным ядром имеет не более n характеристических чисел и соответствующих им собственных функций.

В случае произвольного (невырожденного) ядра характеристические числа являются нулями определителя Фредгольма $D(\lambda)$, т. е. полюсами резольвенты $R(x, t; \lambda)$. Отсюда, в частности, следует, что интегральное уравнение Вольтерра $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$, где $K(x, t) \in L_2(\Omega_0)$, Ω_0 $\{0 \leqslant x,\ t \leqslant a\}$, не имеет характеристических чисел (для него $D(\lambda) = e^{-A_1\lambda}$, см. задачу 108).

Замечание. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, т. е. если $\varphi(x)$ — собственная функция, соответствующая некоторому характеристическому числу λ, то и $C\varphi(x)$, где C — произвольная постоянная, тоже является собственной функцией, соответствующей тому же характеристическому числу λ.

Пример 1. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t)\varphi(t)\, dt = 0.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^\pi \varphi(t) \cos 2t\, dt + \lambda \cos 3x \int_0^\pi \varphi(t) \cos^3 t\, dt.$$

Вводя обозначения

$$C_1 = \int_0^\pi \varphi(t) \cos 2t\, dt, \quad C_2 = \int_0^\pi \varphi(t) \cos^3 t\, dt, \tag{5}$$

будем иметь

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos^2 x + C_2 \lambda \cos 3x. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим линейную систему однородных уравнений

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \lambda \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 t \cos 2t\, dt\right) - C_2\lambda \displaystyle\int_0^\pi \cos 3t \cos 2t\, dt = 0, \\ -C_1\lambda \displaystyle\int_0^\pi \cos^5 t\, dt + C_2\left(1 - \lambda \displaystyle\int_0^\pi \cos^3 t \cos 3t\, dt\right) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Так как

$$\int_0^\pi \cos^2 t \cos 2t\, dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\pi \cos 3t \cos 2t\, dt = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos^5 t\, dt = 0, \quad \int_0^\pi \cos^3 t \cos 3t\, dt = \frac{\pi}{8},$$

то система (7) примет вид

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{\lambda\pi}{4}\right) C_1 = 0, \\ \left(1 - \dfrac{\lambda\pi}{8}\right) C_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Уравнение для нахождения характеристических чисел:

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = \dfrac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \dfrac{8}{\pi}$.

При $\lambda = \dfrac{4}{\pi}$ система (8) принимает вид

$$\begin{cases} 0\cdot C_1 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_2 = 0$, C_1 произвольно. Собственная функция будет $\varphi_1(x) = C_1\lambda\cos^2 x$, или, полагая $C_1\lambda = 1$, получим $\varphi_1(x) = \cos^2 x$.

При $\lambda = \dfrac{8}{\pi}$ система (8) примет вид

$$\begin{cases} (-1)\cdot C_1 = 0, \\ 0\cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, C_2 произвольно, и, значит, собственная функция будет $\varphi_2(x) = C_2\lambda\cos 3x$, или, полагая $C_2\lambda = 1$, получим $\varphi_2(x) = \cos 3x$.

Итак, характеристические числа:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{8}{\pi};$$

соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

Однородное интегральное уравнение Фредгольма может вообще не иметь характеристических чисел и собственных функций, либо же может не иметь действительных характеристических чисел и собственных функций. ▷

Пример 2. Однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (3x-2)t\varphi(t)\,dt = 0$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.

В самом деле, имеем

$$\varphi(x) = \lambda(3x-2)\int_0^1 t\varphi(t)\,dt.$$

Полагая

$$C = \int_0^1 t\varphi(t)\,dt, \tag{9}$$

получим

$$\varphi(x) = C\lambda(3x - 2). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\left[1 - \lambda \int_0^1 (3t^2 - 2t)\,dt\right] \cdot C = 0. \tag{11}$$

Но так как

$$\int_0^1 (3t^2 - 2t)\,dt = 0,$$

то уравнение (11) дает $C = 0$, и, следовательно, $\varphi(x) \equiv 0$.

Итак, данное однородное уравнение при любых λ имеет только одно нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$, а значит, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций. ▷

Пример 3. Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\sqrt{x}\,t - \sqrt{t}\,x\right) \varphi(t)\,dt = 0$$

не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

В самом деле, имеем

$$\varphi(x) = C_1\lambda\sqrt{x} - C_2\lambda x, \tag{12}$$

где

$$C_1 = \int_0^1 t\varphi(t)\,dt, \quad C_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\,\varphi(t)\,dt. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (13), после несложных преобразований получим систему алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) C_1 + \frac{\lambda}{3} C_2 = 0, \\ &-\frac{\lambda}{2} C_1 + \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) C_2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}.$$

При действительных λ он не обращается в нуль, так что из (14) получаем $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, а значит, для всех действительных λ данное уравнение имеет только одно решение, а именно нулевое: $\varphi(x) \equiv 0$. Итак, данное уравнение не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром:

123. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 x\varphi(t)\,dt = 0.$

124. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin x \cos t\,\varphi(t)\,dt = 0.$

125. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin x \sin t\,\varphi(t)\,dt = 0.$

126. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

127. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} (45x^2 \ln t - 9t^2 \ln x)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

128. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} (2xt - 4x^2)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

129. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (5xt^3 + 4x^2 t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

130. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (5xt^3 + 4x^2 t + 3xt)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

131. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x \operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} x)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

132. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x \operatorname{ch} t - t^2 \operatorname{sh} x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

133. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x \operatorname{ch} t - t \operatorname{ch} x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

Если n-е повторное (итерированное) ядро $K_n(x, t)$ ядра $K(x, t)$ есть симметричное ядро, то можно утверждать, что $K(x, t)$ имеет по крайней мере одно характеристическое число (действительное или комплексное) и что n-е степени всех характеристических чисел — числа действительные. В частности, для кососимметричного ядра $K(x, t) = -K(t, x)$ все характеристические числа чисто мнимые: $\lambda = \beta i$, где β — действительное (см. задачу 148).

Ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения называется *симметричным*, если выполняется условие $K(x, t) = K(t, x)$ $(a \leqslant x,\ t \leqslant b)$.

Для интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_{a}^{b} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{1}$$

с симметричным ядром $K(x, t)$ имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно действительное характеристическое число.*

Теорема 2. *Каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число q линейно независимых собственных функций уравнения* (1), *причем*

$$q \leqslant \lambda^2 B^2, \quad \textit{где} \quad B^2 = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{a}^{b} K^2(x, t)\, dx\, dt.$$

Число q называется *рангом* или *кратностью* характеристического числа.

Теорема 3. *Каждая пара собственных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, соответствующих различным характеристическим числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональна, т. е.*

$$\int\limits_{a}^{b} \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)\, dx = 0.$$

Теорема 4. *В каждом конечном интервале оси λ находится конечное число характеристических чисел. Число m характеристических чисел, лежащих в интервале $-l < \lambda < l$, определяется неравенством*

$$m \leqslant l^2 B^2.$$

В том случае, когда ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1) является функцией Грина некоторой однородной задачи Штурма—Лиувилля, нахождение характеристических чисел и собственных функций сводится к решению указанной задачи Штурма—Лиувилля.

Пример 4. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \cos t \sin x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение представим в виде

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{x} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt + \lambda \int\limits_x^{\pi} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

или

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int\limits_0^{x} \varphi(t)\,\cos t\,dt + \lambda \cos x \int\limits_x^{\pi} \varphi(t)\,\sin t\,dt. \tag{15}$$

Дифференцируя обе части (15), находим

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int\limits_0^{x} \varphi(t)\,\cos t\,dt + \lambda \sin x \cos x\,\varphi(x) - \\ - \lambda \sin x \int\limits_x^{\pi} \varphi(t) \sin t\,dt - \lambda \sin x\,\cos x\,\varphi(x),$$

или

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int\limits_0^{x} \varphi(t)\,\cos t\,dt - \lambda \sin x \int\limits_x^{\pi} \varphi(t) \sin t\,dt. \tag{16}$$

Повторное дифференцирование дает

$$\varphi''(x) = -\lambda \sin x \int\limits_0^{x} \varphi(t)\,\cos t\,dt + \lambda \cos^2 x\,\varphi(x) -$$

$$-\lambda\cos x\int\limits_x^\pi \varphi(t)\,\sin t\,dt+\lambda\sin^2 x\,\varphi(x)=$$

$$=\lambda\varphi(x)-\left[\lambda\sin x\int\limits_0^x \varphi(t)\,\cos t\,dt+\lambda\cos x\int\limits_x^\pi \varphi(t)\,\sin t\,dt\right].$$

Выражение в квадратных скобках равно $\varphi(x)$, так что

$$\varphi''(x)=\lambda\varphi(x)-\varphi(x).$$

Из равенств (15) и (16) находим, что

$$\varphi(\pi)=0,\quad \varphi'(0)=0.$$

Итак, данное интегральное уравнение сводится к следующей краевой задаче:

$$\varphi''(x)-(\lambda-1)\,\varphi(x)=0, \tag{17}$$

$$\varphi(\pi)=0,\quad \varphi'(0)=0. \tag{18}$$

Здесь возможны три случая.

1) $\lambda-1=0$, или $\lambda=1$. Уравнение (17) принимает вид $\varphi''(x)=0$. Его общее решение будет $\varphi(x)=C_1x+C_2$. Используя краевые условия (18), получим для нахождения неизвестных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1\pi+C_2=0,\\ \qquad C_1=0,\end{cases}$$

которая имеет единственное решение $C_1=0$, $C_2=0$, а следовательно, интегральное уравнение имеет только тривиальное решение

$$\varphi(x)\equiv 0.$$

2) $\lambda-1>0$, или $\lambda>1$. Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\varphi(x)=C_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda-1}\,x+C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda-1}\,x,$$

откуда

$$\varphi'(x)=\sqrt{\lambda-1}\big(C_1\operatorname{sh}\sqrt{\lambda-1}\,x+C_2\operatorname{ch}\sqrt{\lambda-1}\,x\big).$$

Для нахождения значений C_1 и C_2 краевые условия дают систему

$$\begin{cases} C_1\operatorname{ch}\pi\sqrt{\lambda-1}+C_2\operatorname{sh}\pi\sqrt{\lambda-1}=0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad C_2=0.\end{cases}$$

Система имеет единственное решение $C_1=0$, $C_2=0$. Интегральное уравнение имеет тривиальное решение $\varphi(x)\equiv 0$. Итак, при $\lambda>1$ интегральное уравнение не имеет характеристических чисел, а значит, и собственных функций.

3) $\lambda-1<0$, или $\lambda<1$. Общее решение уравнения (17) будет

$$\varphi(x)=C_1\cos\sqrt{1-\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{1-\lambda}\,x.$$

Отсюда находим, что

$$\varphi'(x)=\sqrt{1-\lambda}\big(-C_1\sin\sqrt{1-\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{1-\lambda}\,x\big).$$

Краевые условия (18) в этом случае дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 \cos \pi\sqrt{1-\lambda} + C_2 \sin \pi\sqrt{1-\lambda} = 0, \\ \sqrt{1-\lambda}\, C_2 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \pi\sqrt{1-\lambda} & \sin \pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}.$$

Полагая его равным нулю, получим уравнение для нахождения характеристических чисел:

$$\begin{vmatrix} \cos \pi\sqrt{1-\lambda} & \sin \pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{20}$$

или $\sqrt{1-\lambda}\cos \pi\sqrt{1-\lambda} = 0$. По предположению $\sqrt{1-\lambda} \neq 0$, поэтому $\cos \pi\sqrt{1-\lambda} = 0$. Отсюда находим, что $\pi\sqrt{1-\lambda} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число. Все корни уравнения (20) даются формулой

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

При значениях $\lambda = \lambda_n$ система (19) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет бесконечное множество ненулевых решений

$$\begin{cases} C_1 = C, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная. Значит, исходное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений вида

$$\varphi(x) = C \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

которые являются собственными функциями этого уравнения.

Итак, характеристические числа и собственные функции данного интегрального уравнения

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

где n — любое целое число. ▷

Пример 5. Показать, что интегральное уравнение с несимметричным ядром

$$K(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t, \quad 0 \leqslant x, \quad t \leqslant 1, \tag{21}$$

не имеет характеристических чисел.

Решение. Покажем, что уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

где ядро задано формулой (21), имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$ $(\lambda \neq 0)$.

В самом деле, перепишем уравнение (22) в виде

$$\varphi(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t\, \varphi(t)\,dt. \tag{23}$$

Обозначим

$$C = \int_0^1 \cos \pi t\, \varphi(t)\,dt;$$

тогда

$$\varphi(x) = C\lambda \sin \pi x.$$

Подставив это выражение для $\varphi(x)$ в обе части (23), получим

$$C\lambda \sin \pi x = C\lambda^2 \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t\,dt.$$

Но

$$\int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t\,dt = 0;$$

поэтому $C\lambda \sin \pi x \equiv 0$, откуда $C = 0$, а значит, $\varphi(x) \equiv 0$. Таким образом, ядро (21) не имеет характеристических чисел. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти характеристические числа и собственные функции однородных интегральных уравнений с симметричными ядрами, если эти ядра имеют следующий вид:

134. $K(x,t) = 1 + xt + x^2t^2, \quad -1 \leqslant x, \quad t \leqslant 1.$

135. $K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$ **136.** $K(x,t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ x(t+1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

137. $K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)(x-2), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

138. $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

139. $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

140. $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \sin (t-1), & -\pi \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \sin (x-1), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

141. $K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

142. $K(x,t) = e^{-|x-t|}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

143. $K(x,t) = \begin{cases} -e^{-t}\operatorname{sh} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -e^{-x}\operatorname{sh} t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Теорема Мерсера. *Если симметричное L_2-ядро $K(x,t)$ непрерывно и обладает лишь положительными характеристическими числами (или не более чем конечным числом отрицательных характеристических чисел), то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

сходится абсолютно и равномерно к ядру $K(x,t)$, так что справедлива формула

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n}.$$

Здесь $\varphi_n(x)$ — ортонормированные собственные функции ядра $K(x,t)$.

В общем случае симметричного L_2-ядра $K(x,t)$ билинейный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

сходится в среднем к ядру $K(x,t)$.

Задачи для самостоятельного решения

Исходя из разложения ядра $K(x,t)$ интегрального уравнения по собственным функциям, показать, что имеют место следующие соотношения:

144. $\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\pi x \sin n\pi t}{n^2} = \begin{cases} x(1-t), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(1-x), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

145. $$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ t, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

146. Показать, что если λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ суть характеристические числа ядра $K(x,t)$, то собственные функции уравнений

$$\varphi(x)-\lambda_1\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=0,\qquad \psi(x)-\lambda_2\int_a^b K(x,t)\,\psi(t)\,dt=0$$

ортогональны, т. е.

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx=0.$$

147. Показать, что если $K(x,t)$ — симметричное ядро, то второе итерированное ядро $K_2(x,t)$ имеет только положительные характеристические числа.

148. Показать, что если ядро $K(x,t)$ кососимметричное, т. е. $K(t,x)=-K(x,t)$, то все его характеристические числа чисто мнимые.

149. Показать, что если ядро $K(x,t)$ симметричное, то имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^m}=A_m\quad (m=2,3,\ldots),$$

где λ_n — характеристические числа, A_m — m-е следы ядра $K(x,t)$.

Используя результаты задач 135, 138, 142 и 149, найти суммы следующих рядов:

150. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. **151.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

152. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\mu_n^2)^2}$, где μ_n — корни уравнения $2\operatorname{ctg}\mu=\mu-\dfrac{1}{\mu}$.

Резольвента симметричного ядра есть мероморфная функция от λ, для которой характеристические числа интегрального уравнения являются простыми полюсами. Ее вычеты относительно полюсов λ_i дают соответствующие этим значениям λ_i собственные функции (при любом значении t).

Задачи для самостоятельного решения

Найти собственные функции интегральных уравнений, резольвенты которых определяются следующими формулами:

153. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{3 - \lambda + 3(1 - \lambda)(2x - 1)(2t - 1)}{\lambda^2 - 4\lambda + 3}$.

154. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{(15 - 6\lambda)\, xt + (15 - 10\lambda)\, x^2t^2}{4\lambda^2 - 16\lambda + 15}$.

155. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{4(5 - 2\lambda)[3 - 2\lambda + (3 - 6\lambda)\, xt] + 5(4\lambda^2 - 8\lambda + 3)(3x^2 - 1)(3t^2 - 1)}{4(1 - 2\lambda)(3 - 2\lambda)(5 - 2\lambda)}$.

Интегральные уравнения Фредгольма с ядрами, зависящими от разности аргументов

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x - t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{24}$$

где ядро $K(x)$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ есть четная функция, периодически продолжаемая на всю ось Ox, так что

$$K(x - t) = K(t - x).$$

Можно показать, что собственные функции уравнения (24) суть

$$\begin{cases} \varphi_n^{(1)}(x) = \cos nx \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \varphi_n^{(2)}(x) = \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

а соответствующие характеристические числа

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где a_n — коэффициенты Фурье функции $K(x)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx\, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, каждому значению λ_n соответствуют две линейно независимые собственные функции $\cos nx$, $\sin nx$, так что каждое λ_n есть двукратное характеристическое число. Функция $\varphi_0(x) \equiv 1$ также является собственной функцией уравнения (24), отвечающей характеристическому числу

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi a_0},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x)\,dx.$$

Покажем, например, что $\cos nx$ есть собственная функция интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{25}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx\,dx.$$

Делая подстановку $x - t = z$, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos nt\,dt = -\int_{x+\pi}^{x-\pi} K(z) \cos n(x-z)\,dz =$$

$$= \cos nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \cos nz\,dz + \sin nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \sin nz\,dz = \pi a_n \cos nx,$$

так как второй интеграл равен нулю в силу четности $K(x)$, а первый интеграл есть умноженный на π коэффициент Фурье a_n в разложении четной функции $K(x)$.

Итак,

$$\cos nx = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos nt\,dt,$$

а это и означает, что $\cos nx$ есть собственная функция уравнения (25). Аналогично устанавливаем, что $\sin nx$ есть собственная функция интегрального уравнения (25), отвечающая тому же характеристическому числу $\dfrac{1}{\pi a_n}$.

Задачи для самостоятельного решения

156. Найти собственные функции и соответствующие характеристические числа уравнений

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

157. Показать, что симметричное ядро

$$K(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-t)+h^2} \quad (-\pi \leqslant x,\ t \leqslant \pi)$$

имеет при $|h| < 1$ собственные функции 1, $\sin nx$, $\cos nx$, соответствующие характеристическим числам 1, $\dfrac{1}{h^n}$, $\dfrac{1}{h^n}$.

158. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $K(x) = x^2$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ — периодическая функция с периодом 2π.

Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций

Абсолютная величина двойного интеграла (интеграла Гильберта)

$$\left|(K\varphi,\varphi)\right| = \left|\int_a^b \int_a^b K(x,t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dx\,dt\right|,$$

где $K(x,t) = K(t,x)$ — симметричное ядро некоторого интегрального уравнения, на множестве нормированных функций $\varphi(x)$, т. е. таких, что

$$(\varphi,\varphi) = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1,$$

имеет максимум, равный

$$\max\left|(K\varphi,\varphi)\right| = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число ядра $K(x,t)$. Максимум достигается при $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ — собственной функции ядра, отвечающей λ_1.

Пример 6. Найти максимум

$$\left|(K\varphi,\varphi)\right| = \left|\int_0^\pi\int_0^\pi K(x,t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dx\,dt\right|$$

при условии

$$(\varphi,\varphi) = \int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx = 1,$$

если

$$K(x,t) = \cos x\cos 2t + \cos t\cos 2x + 1.$$

Решение. Решая однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\pi (\cos x\cos 2t + \cos t\cos 2x + 1)\,\varphi(t)\,dt$$

как уравнение с вырожденным ядром, находим характеристические числа $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ и $\lambda_{2,3} = \pm\frac{2}{\pi}$ и соответствующие им собственные функции $\varphi_1(x) = C_1$, $\varphi_2(x) = C_2(\cos x + \cos 2x)$, $\varphi_3(x) = C_3(\cos x - \cos 2x)$, где C_1, C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Наименьшим по модулю характеристическим числом является $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, ему отвечает собственная функция $\varphi_1(x) = C_1$. Из условия нормировки $(\varphi,\varphi) = 1$ находим $C_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Следовательно,

$$\max\left|\int_0^\pi\int_0^\pi (\cos x\cos 2t + \cos t\cos 2x + 1)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dx\,dt\right| = 2\pi,$$

и достигается он на функциях $\varphi(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. ▷

Задача для самостоятельного решения

159. Найти максимум

$$\left|\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dx\,dt\right|$$

при условии, что

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1,$$

если:
а) $K(x,t) = xt, \quad 0 \leqslant x, t \leqslant 1$; б) $K(x,t) = xt + x^2t^2, \quad -1 \leqslant x, t \leqslant 1$;
в) $K(x,t) = \begin{cases} (x+1)\,t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\,x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

§ 11. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром

Однородное интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x)\, b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = 0, \tag{1}$$

когда параметр λ не является его характеристическим числом (т. е. $\Delta(\lambda) \neq 0$), имеет единственное нулевое решение: $\varphi(x) \equiv 0$. Если же λ есть характеристическое число (т. е. $\Delta(\lambda) = 0$), то кроме нулевого решения уравнение (1) имеет и ненулевые решения, которыми являются собственные функции, соответствующие этому характеристическому числу. Общее решение однородного уравнения (1) получается как линейная комбинация этих собственных функций.

Пример. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos^3 t \cos 3x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$$

Решение. Характеристические числа данного уравнения суть $\lambda_1 = \dfrac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \dfrac{8}{\pi}$, а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \qquad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

Общим решением уравнения будет

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = C\cos^2 x, && \text{если} \quad \lambda = \frac{4}{\pi}; \\ &\varphi(x) = C\cos 3x, && \text{если} \quad \lambda = \frac{8}{\pi}; \\ &\varphi(x) = 0, && \text{если} \quad \lambda \neq \frac{4}{\pi},\ \lambda \neq \frac{8}{\pi}, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная. Последнее, нулевое, решение получается из общих решений при $C = 0$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие однородные интегральные уравнения:

160. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$ **161.** $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} \arccos x\,\varphi(t)\,dt = 0.$

162. $\varphi(x) - 2\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\varphi(t)}{1+\cos 2t}\,dt = 0.$ **163.** $\varphi(x) - \frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} |x|\,\varphi(t)\,dt = 0.$

164. $\varphi(x) + 6\int\limits_0^{1} (x^2 - 2xt)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

§ 12. Неоднородные симметричные уравнения

Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

называется *симметричным*, если его ядро $K(x,t)$ симметрично: $K(x,t) \equiv K(t,x)$.

Если $f(x)$ непрерывна и параметр λ не совпадает с характеристическими числами λ_n $(n = 1, 2, \dots)$ соответствующего однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0, \tag{2}$$

то уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение, которое дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\,\varphi_n(x), \tag{3}$$

где $\varphi_n(x)$ — собственные функции уравнения (2),

$$a_n = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx. \tag{4}$$

причем ряд, стоящий в правой части формулы (3), сходится абсолютно и равномерно в квадрате $a \leqslant x,\ t \leqslant b$.

Если же параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, например $\lambda = \lambda_k$, ранга q (кратность числа λ_k), то уравнение (1), вообще говоря, не имеет решений. Решения существуют тогда и только тогда, когда выполняются q условий

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, q), \tag{5}$$

т. е. когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим характеристическому числу λ_k. В этом случае уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, которые содержат q произвольных постоянных и даются формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\varphi_n(x) + \\ + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x), \tag{6}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_q$ — произвольные постоянные.

В случае вырожденного ядра

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\,b_k(t),$$

формулы (3) и (6) будут содержать в правых частях вместо рядов конечные суммы.

Когда правая часть уравнения (1), т.е. функция $f(x)$, будет ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_n(x)$ уравнения (2), то решением уравнения (1) будет являться сама эта функция: $\varphi(x) = f(x)$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = x, \tag{7}$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Характеристические числа и соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2; \quad \varphi_n(x) = \sin \pi n x, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Если $\lambda \neq \lambda_n$, то решением уравнения (7) будет

$$\varphi(x) = x - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} \sin n\pi x. \tag{8}$$

Находим коэффициенты Фурье a_n правой части уравнения:

$$a_n = \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \int_0^1 x \, d\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Подставляя в (8), получим

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda + n^2\pi^2)} \sin n\pi x.$$

При $\lambda = -n^2\pi^2$ уравнение (7) не имеет решений, так как

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \neq 0. \qquad \triangleright$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \cos \pi x,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} (x+1)\, t, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\, x, & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

<u>*Решение.*</u> Характеристические числа:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = -n^2\pi^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -n^2\pi^2$, то решение данного уравнения будет иметь вид

$$\varphi(x) = \cos \pi x - \lambda \left[\frac{a_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x) \right],$$

и так как

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos \pi x \, dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2},$$

$$a_n = \int_0^1 \cos \pi x (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1, \end{cases}$$

то

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin \pi x + \pi \cos \pi x) \right].$$

При $\lambda = 1$ и $\lambda = -\pi^2$ $(n = 1)$ уравнение решений не имеет, так как его правая часть, т. е. функция $\cos \pi x$, не ортогональна к соответствующим собственным функциям

$$\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_1(x) = \sin \pi x + \pi \cos \pi x.$$

Если же $\lambda = -n^2\pi^2$, где $n = 2, 3, \ldots$, то данное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые даются формулой (6):

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin \pi x + \pi \cos \pi x) \right] + \\ + C(\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x),$$

где C — произвольная постоянная. ▷

В некоторых случаях неоднородное симметричное интегральное уравнение можно свести к неоднородной краевой задаче. Это можно сделать тогда, когда ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения является функцией Грина некоторого линейного дифференциального оператора. Покажем на примере, как это делается.

Пример 3. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = e^x, \tag{9}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} (t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh} (x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Данное уравнение перепишем в виде

$$\varphi(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh} (x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t\, \varphi(t)\, dt + \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh} (t-1)\, \varphi(t)\, dt. \tag{10}$$

Дифференцируя дважды, найдем

$$\varphi'(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{ch} (x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t\, \varphi(t)\, dt + \lambda \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh} (t-1)\, \varphi(t)\, dt,$$

$$\varphi''(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh} (x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t\, \varphi(t)\, dt + \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh} (t-1)\, \varphi(t)\, dt + \\ + \frac{\lambda \operatorname{ch} (x-1)}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x\, \varphi(x) - \frac{\lambda \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} (x-1)\, \varphi(x),$$

или

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + \lambda\varphi(x).$$

Полагая в (10) $x = 0$ и $x = 1$, получим, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = e$. Искомая функция $\varphi(x)$ является решением неоднородной краевой задачи

$$\varphi''(x) - (\lambda + 1)\varphi(x) = 0, \tag{11}$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = e. \tag{12}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) $\lambda + 1 = 0$, т. е. $\lambda = -1$. Уравнение (11) имеет вид $\varphi''(x) = 0$. Его общее решение

$$\varphi(x) = C_1x + C_2.$$

Учитывая краевые условия (12), получим для нахождения постоянных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 + C_2 = e, \end{cases}$$

решая которую находим $C_1 = e - 1$, $C_2 = 1$, и, следовательно,

$$\varphi(x) = (e - 1)x + 1.$$

2) $\lambda + 1 > 0$, т.е. $\lambda > -1$ $(\lambda \neq 0)$. Общее решение уравнения (11)

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda+1}\,x + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda+1}\,x.$$

Краевые условия (12) дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda+1} + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda+1} = e, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda+1}}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda+1}}.$$

Искомая функция $\varphi(x)$ после несложных преобразований приведется к виду

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda+1}(1-x) + e\operatorname{sh}\sqrt{\lambda+1}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda+1}}.$$

3) $\lambda + 1 < 0$, т. е. $\lambda < -1$. Обозначим $\lambda + 1 = -\mu^2$. Общим решением уравнения (11) будет $\varphi(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x$. Краевые условия (12) дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1\cos\mu + C_2\sin\mu = e. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь, в свою очередь, возможны два случая.

а) μ не является корнем уравнения $\sin\mu = 0$. Тогда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \cos\mu}{\sin\mu},$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \cos\mu x + \frac{e - \cos\mu}{\sin\mu}\sin\mu x,$$

где $\mu = \sqrt{-\lambda - 1}$.

б) μ является корнем уравнения $\sin\mu = 0$, т. е. $\mu = n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Система (13) несовместна, а следовательно, данное уравнение (9) не имеет решений. В этом случае соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \left(1 + n^2\pi^2\right)\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{14}$$

имеет нетривиальные решения, т. е. числа $\lambda_n = -\left(1 + n^2\pi^2\right)$ являются характеристическими числами, а функции $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ — собственными функциями уравнения (14). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения:

165. $\varphi(x) - \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \dfrac{x}{2}$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

166. $\varphi(x) + \displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = xe^x$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

167. $\varphi(x) - \lambda\displaystyle\int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = x - 1$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} x - t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t - x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

168. $\varphi(x) - 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \cos 2x$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

169. $\varphi(x) - \lambda\displaystyle\int_0^{\pi} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 1$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

170. $\varphi(x) - \lambda\displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = x$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)(x-3), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

171. $\varphi(x) - \int\limits_0^{\pi} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \sin x,$

$$K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

172. $\varphi(x) - \int\limits_0^{1} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \mathrm{s} \quad x, \qquad K(x,t) = \begin{cases} -e^{-t} \operatorname{sh} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -e^{-x} \operatorname{sh} t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

173. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \operatorname{ch} x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

174. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} |x - t|\, \varphi(t)\, dt = 1.$

---

§ 13. Альтернатива Фредгольма

Для интегральных уравнений Фредгольма имеют место теоремы:

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма). *Или неоднородное линейное уравнение 2-го рода*

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{1}$$

имеет единственное решение при любой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

имеет по крайней мере одно нетривиальное, т. е. не равное тождественно нулю, решение.

Теорема 2. *Если для уравнения* (1) *имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для сопряженного уравнения*

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(t, x)\, \psi(t)\, dt = g(x). \tag{3}$$

Однородное интегральное уравнение (2) *и сопряженное к нему уравнение*

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(t, x)\, \psi(t)\, dt = 0 \tag{4}$$

имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Замечание. Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (2), то их линейная комбинация

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x),$$

где C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием существования решения* $\varphi(x)$ *неоднородного уравнения* (1) *во втором случае альтернативы является условие ортогональности правой части этого уравнения, т. е. функции* $f(x)$, *к любому решению* $\psi(x)$ *сопряженного к уравнению* (2) *однородного уравнения* (4):

$$\int_a^b f(x)\, \psi(x)\, dx = 0. \tag{5}$$

Замечание. При выполнении условия (5) уравнение (1) будет иметь бесконечное множество решений, так как этому уравнению будет удовлетворять любая функция вида $\varphi(x) + \widetilde{\varphi}(x)$, где $\varphi(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (1), а $\widetilde{\varphi}(x)$ — любое решение соответствующего однородного уравнения (2). Кроме того, если уравнению (1) удовлетворяют функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то в силу линейности уравнения их разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ есть решение соответствующего однородного уравнения (2).

На практике особенно важное значение имеет альтернатива Фредгольма. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1) имеет решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение (2) или сопряженное к нему уравнение (4) имеют только тривиальные решения. Отсюда в силу альтернативы следует, что уравнение (1) действительно имеет решение.

Замечания. 1) Если ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1) симметрично, т. е.

$$K(x,t) \equiv K(t,x),$$

то однородное сопряженное уравнение (4) совпадает с однородным уравнением (2), соответствующим уравнению (1).

2) В случае неоднородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x)\, b_k(t)\right] \varphi(t)\, dt = f(x)$$

условие (5) ортогональности правой части этого уравнения дает n равенств

$$\int_a^b f(t)\, b_k(t)\, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 1.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)\, t^2 \varphi(t)\, dt = e^x.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x) = C\lambda(5x^2 - 3) + e^x, \tag{6}$$

где

$$C = \int_0^1 t^2 \varphi(t)\, dt. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7), получим

$$C = C\lambda \int_0^1 (5t^4 - 3t^2)\, dt + \int_0^1 t^2 e^t\, dt,$$

откуда

$$C = e - 2.$$

Данное уравнение при любых λ имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \lambda(e-2)(5x^2 - 3) + e^x,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)\, t^2 \varphi(t)\, dt = 0$$

имеет единственное нулевое решение: $\varphi(x) \equiv 0$. ▷

Пример 2.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \sin \ln x \, \varphi(t)\, dt = 2x.$$

<u>*Решение*</u>. Имеем

$$\varphi(x) = C\lambda \sin \ln x + 2x,$$

где $C = \int_0^1 \varphi(t)\, dt$. Подставляя выражение $\varphi(t)$ в интеграл, найдем

$$C = C\lambda \int_0^1 \sin \ln t \, dt + 1,$$

откуда

$$C\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = 1.$$

Если $\lambda \neq -2$, то данное уравнение имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda} \sin \ln x + 2x;$$

соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \sin \ln x \, \varphi(t)\, dt = 0$$

имеет только нулевое решение: $\varphi(x) \equiv 0$.

Если же $\lambda = -2$, то данное уравнение не имеет решений, так как правая часть $f(x) = 2x$ не ортогональна к функции $\sin \ln x$; однородное уравнение имеет бесконечное множество решений, так как из уравнения для определения C $(0 \cdot C = 0)$ следует, что C — произвольная постоянная; все эти решения даются формулой

$$\varphi(x) = \widetilde{C} \sin \ln x \quad (\widetilde{C} = -2C).$$

▷

Пример 3.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

<u>*Решение*</u>. Перепишем уравнение в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos x \cos t - \sin x \sin t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

Отсюда имеем

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos x - C_2 \lambda \sin x + \cos 3x, \tag{8}$$

где

$$C_1 = \int_0^\pi \varphi(t)\cos t\,dt, \quad C_2 = \int_0^\pi \varphi(t)\sin t\,dt. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (9), получим

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^\pi (C_1\lambda\cos t - C_2\lambda\sin t + \cos 3t)\cos t\,dt, \\ C_2 = \int_0^\pi (C_1\lambda\cos t - C_2\lambda\sin t + \cos 3t)\sin t\,dt, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \lambda\int_0^\pi \cos^2 t\,dt\right) + C_2\lambda\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt = \int_0^\pi \cos 3t\cos t\,dt, \\ -C_1\lambda\int_0^\pi \cos t\sin t\,dt + C_2\left(1 + \lambda\int_0^\pi \sin^2 t\,dt\right) = \int_0^\pi \cos 3t\sin t\,dt, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \lambda\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ C_2\left(1 + \lambda\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\pi^2}{4}\lambda^2.$$

1) Если $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ ($\Delta(\lambda) \neq 0$), то система (10) имеет единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, следовательно, данное уравнение имеет единственное решение $\varphi(x) = \cos 3x$, а соответствующее ему однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^\pi \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{11}$$

имеет только нулевое решение: $\varphi(x) \equiv 0$.

2) Если $\lambda = \frac{2}{\pi}$, то система (10) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ C_2 \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $C_2 = 0$, а $C_1 = C$, где C — произвольная постоянная. Данное уравнение будет иметь бесконечное множество решений, которые даются формулой

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} C \cdot \cos x + \cos 3x,$$

или

$$\varphi(x) = \widetilde{C} \cdot \cos x + \cos 3x \quad \left(\widetilde{C} = \frac{2C}{\pi}\right);$$

соответствующее однородное уравнение (11) имеет бесконечное множество решений:

$$\varphi(x) = \widetilde{C} \cdot \cos x.$$

3) Если $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$, то система (10) принимает вид

$$\begin{cases} 2 \cdot C_1 = 0, \\ 0 \cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = C$, где C — произвольная постоянная.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} C \cdot \sin x + \cos 3x,$$

или

$$\varphi(x) = \widetilde{C} \cdot \sin x + \cos 3x \quad \left(\widetilde{C} = \frac{2C}{\pi}\right).$$

В этом примере ядро $K(x,t) = \cos(x+t)$ заданного уравнения симметрично: $K(x,t) = K(t,x)$; правая часть уравнения, т. е. функция $f(x) = \cos 3x$, ортогональна к функциям $\cos x$ и $\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ следующие интегральные уравнения:

175. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\, \varphi(t)\, dt = 1.$ **176.** $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} x e^t \varphi(t)\, dt = x.$

177. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} |x-\pi|\, \varphi(t)\, dt = x.$ **178.** $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} (2xt - 4x^2)\, \varphi(t)\, dt = 1 - 2x.$

179. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2xt)\, \varphi(t)\, dt = x^3 - x.$

180. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} \cos x \cos t + \frac{1}{\pi} \sin 2x \sin 2t \right) \varphi(t)\, dt = \sin x.$

181. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 1, \quad$ где $\quad K(x, t) = \begin{cases} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh} x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Пример 4. При каких значениях параметров α и β разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 xt^2 \varphi(t)\, dt + \alpha x + \beta\, ? \tag{12}$$

Решение. Если λ не является характеристическим числом ядра $K(x, t) = xt^2$, то уравнение (12) разрешимо при любой правой части, т. е. при любых α и β.

Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 xt^2 \varphi(t)\, dt, \tag{13}$$

соответствующее данному уравнению (12). Решая (13), как уравнение с вырожденным ядром, найдем, что $\lambda = 4$ есть характеристическое число этого ядра. Собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda = 4$, есть $\varphi(x) = x$ (с точностью до постоянного множителя).

Рассмотрим однородное интегральное уравнение, сопряженное уравнению (13):

$$\psi(x) = \mu \int\limits_0^1 tx^2 \psi(t)\, dt. \tag{14}$$

Характеристическим числом этого уравнения является $\mu = 4$. Собственной функцией уравнения (14), отвечающей этому характеристическому числу, будет $\psi(x) = x^2$. Поэтому неоднородное уравнение (12) при $\lambda = 4$ будет разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^1 (\alpha x + \beta) x^2\, dx = 0, \quad \text{или} \quad 3\alpha + 4\beta = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$\varphi(x) = 4 \int\limits_0^1 xt^2 \varphi(t)\, dt + x + 1. \tag{16}$$

Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 1$, так что условие (15) не удовлетворяется: уравнение (16) неразрешимо. Пусть теперь имеем уравнение

$$\varphi(x) = 4\int_0^1 xt^2\varphi(t)\,dt + x - \frac{3}{4}, \tag{17}$$

где $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{4}$. При этих значениях параметров α и β условие (15), очевидно, выполняется и, значит, уравнение (17) разрешимо. Его решение имеет вид

$$\varphi(x) = 4Cx + x - \frac{3}{4} = C_1x - \frac{3}{4},$$

где C_1 — произвольная постоянная, откуда, в соответствии с общей теорией, видно, что решение уравнения (17) не единственно. ▷

Задачи для самостоятельного решения

При каких значениях параметров разрешимы следующие интегральные уравнения?

182. $\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^1 xt\varphi(t)\,dt + \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$

183. $\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (x+t)\varphi(t)\,dt + \alpha e^x + \beta x.$

184. $\varphi(x) = \lambda\int_0^{\pi/2} xt\varphi(t)\,dt + \alpha x + \beta\sin x.$

Нефредгольмовы интегральные уравнения

Если в интегральном уравнении

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{18}$$

ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt < +\infty \tag{19}$$

(a, b могут быть и бесконечными), то для уравнения (18) справедливы теоремы Фредгольма.

Если условие (19) не выполнено, то у интегрального уравнения (18) характеристические числа могут заполнять целые интервалы и могут быть характеристические числа бесконечной кратности. Поэтому такие уравнения называют часто *нефредгольмовыми* интегральными уравнениями.

Задачи для самостоятельного решения

185. Показать, что интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt}\varphi(t)\,dt = f(x)$$

является нефредгольмовым.

186. Показать, что интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi(t)\sin xt\,dt$$

имеет характеристические числа $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ бесконечной кратности, и найти соответствующие собственные функции.

187. Показать, что интегральное уравнение с ядром Ганкеля

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} J_\nu(2\sqrt{xt})\varphi(t)\,dt$$

(где $J_\nu(z)$ — бесселева функция 1-го рода порядка ν) имеет характеристические числа $\lambda = \pm 1$ бесконечной кратности, и найти соответствующие собственные функции.

188. Показать, что для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}\varphi(t)\,dt$$

любое число λ, для которого одно из значений $\sqrt[n+1]{\lambda}$ имеет положительную действительную часть, является характеристическим числом.

189. Показать, что интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right)\varphi(t)\,dt$$

имеет бесконечное множество характеристических чисел $\lambda = \xi + i\eta$, где точка (ξ, η) находится вне параболы $\xi + \eta^2 = 0$.

§ 14. Построение функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L[y] \equiv p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0, \tag{1}$$

где функция $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$ на $[a, b]$, и краевые условия

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) +$$
$$+ \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где линейные формы $V_1, \ldots, V_n$ от

$$y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), \quad y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$$

являются линейно независимыми.

Предполагаем, что однородная краевая задача (1)–(2) имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Определение. Функцией Грина (функцией влияния) краевой задачи (1)–(2) называется функция $G(x, \xi)$, построенная для любой точки ξ, $a < \xi < b$, и имеющая следующие 4 свойства:

1°. $G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно при $a \leqslant x \leqslant b$.

2°. Ее $(n-1)$-я производная по x в точке $x = \xi$ имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен $\dfrac{1}{p_0(\xi)}$, т. е.

$$\left.\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}. \tag{3}$$

3°. В каждом из интервалов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ функция $G(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением уравнения (1):

$$L[G] = 0.$$

4°. $G(x, \xi)$ удовлетворяет граничным условиям (2):

$$V_k(G) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Теорема 1. *Если краевая задача* (1)–(2) *имеет лишь тривиальное решение* $y(x) \equiv 0$, *то оператор* L *имеет одну и только одну функцию Грина* $G(x, \xi)$.

Доказательство. Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения $L[y] = 0$. Тогда в силу свойства 3° искомая функция $G(x,\xi)$ на интервалах $[a,\xi)$ и $(\xi, b]$ должна иметь следующее представление:

$$G(x,\xi) = a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \ldots + a_ny_n(x) \quad \text{при} \quad a \leqslant x < \xi$$

и

$$G(x,\xi) = b_1y_1(x) + b_2y_2(x) + \ldots + b_ny_n(x) \quad \text{при} \quad \xi < x \leqslant b.$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — некоторые функции от ξ. Непрерывность функции $G(x,\xi)$ и ее первых $n-2$ производных от x в точке $x = \xi$ дает нам соотношения

$$\begin{gathered}
\left[b_1y_1(\xi) + \ldots + b_ny_n(\xi)\right] - \left[a_1y_1(\xi) + \ldots + a_ny_n(\xi)\right] = 0, \\
\left[b_1y_1'(\xi) + \ldots + b_ny_n'(\xi)\right] - \left[a_1y_1'(\xi) + \ldots + a_ny_n'(\xi)\right] = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left[b_1y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + b_ny_n^{(n-2)}(\xi)\right] - \left[a_1y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + a_ny_n^{(n-2)}(\xi)\right] = 0,
\end{gathered}$$

а условие (3) принимает вид

$$\left[b_1y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + b_ny_n^{(n-1)}(\xi)\right] - \left[a_1y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + a_ny_n^{(n-1)}(\xi)\right] = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Положим $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, тогда получим систему линейных уравнений относительно $c_k(\xi)$:

$$\begin{cases}
c_1y_1(\xi) + c_2y_2(\xi) + \ldots + c_ny_n(\xi) = 0, \\
c_1y_1'(\xi) + c_2y_2'(\xi) + \ldots + c_ny_n'(\xi) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_1y_1^{(n-2)}(\xi) + c_2y_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_ny_n^{(n-2)}(\xi) = 0, \\
c_1y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2y_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}(\xi) = \dfrac{1}{p_0(\xi)}.
\end{cases} \tag{5}$$

Определитель системы (5) равен значению вронскиана $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в точке $x = \xi$, а потому отличен от нуля. Поэтому система (5) однозначно определяет функции $c_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Для определения функций $a_k(\xi)$ и $b_k(\xi)$ воспользуемся краевыми условиями (2). Запишем $V_k(y)$ в виде

$$V_k(y) = A_k(y) + B_k(y), \tag{6}$$

где

$$A_k(y) = \alpha_ky(a) + \alpha_k^{(1)}y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a),$$

$$B_k(y) = \beta_ky(b) + \beta_k^{(1)}y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b).$$

Тогда в силу условий (4) получим

$$V_k(G) = a_1A_k(y_1) + a_2A_k(y_2) + \ldots + a_nA_k(y_n) +$$
$$+ b_1B_k(y_1) + b_2B_k(y_2) + \ldots + b_nB_k(y_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n$$

Учитывая, что $a_k = b_k - c_k$, будем иметь

$$(b_1 - c_1)A_k(y_1) + (b_2 - c_2)A_k(y_2) + \ldots + (b_n - c_n)A_k(y_n) + b_1B_k(y_1) +$$
$$+ b_2B_k(y_2) + \ldots + b_nB_k(y_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда в силу (6)

$$b_1V_k(y_1) + b_2V_k(y_2) + \ldots + b_nV_k(y_n) =$$
$$= c_1A_k(y_1) + c_2A_k(y_2) + \ldots + c_nA_k(y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Заметим, что система (7) является линейной относительно величин $b_1, \ldots, b_n$. Определитель этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \ldots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \ldots & V_2(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \ldots & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

в силу нашего предположения о линейной независимости форм V_1, $V_2, \ldots, V_n$.

Следовательно, система уравнений (7) имеет единственное решение относительно $b_1(\xi), b_2(\xi), \ldots, b_n(\xi)$, а так как $a_k(\xi) = b_k(\xi) - c_k(\xi)$, то и величины $a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются однозначно. Тем самым существование и единственность функции Грина $G(x, \xi)$ доказаны, и одновременно дан метод ее построения. ■

Замечание 1. Если краевая задача (1)–(2) самосопряженная, то функция Грина является симметричной, т. е.

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Справедливо и обратное утверждение.

Замечание 2. Если на одном из концов отрезка $[a, b]$ коэффициент при старшей производной обращается в нуль, например, $p_0(a) = 0$, то ставится естественное граничное условие ограниченности решения при $x = a$, а на другом конце задается обычное граничное условие (см. ниже пример 2).

Важный частный случай

Рассмотрим построение функции Грина для дифференциального уравнения 2-го порядка вида

$$\begin{gathered} (p(x)y')' + q(x)y = 0, \\ p(x) \neq 0 \ \text{ на } \ [a, b], \quad p(x) \in C^{(1)}[a, b], \end{gathered} \tag{8}$$

с граничными условиями

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{9}$$

Предположим, что $y_1(x)$ есть решение уравнения (8), определяемое начальными условиями

$$y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = \alpha \neq 0.$$

Это решение, вообще говоря, не обязано удовлетворять второму граничному условию, поэтому мы будем предполагать, что $y_1(b) \neq 0$. Но функции вида $C_1 y_1(x)$, где C_1 — произвольная постоянная, очевидно, являются решениями уравнения (8) и удовлетворяют граничному условию

$$y(a) = 0.$$

Аналогично находим ненулевое решение $y_2(x)$ уравнения (8), причем такое, чтобы оно удовлетворяло второму граничному условию, т. е.

$$y_2(b) = 0.$$

Этому же условию будут удовлетворять все решения семейства $C_2 y_2(x)$, где C_2 — произвольная постоянная.

Теперь функцию Грина для задачи (8)–(9) ищем в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1 y_1(x) & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2 y_2(x) & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{10}$$

причем постоянные C_1 и C_2 выберем так, чтобы выполнялись свойства 1° и 2°, т. е. чтобы функция $G(x, \xi)$ была непрерывна по x при фиксированном ξ, в частности, непрерывна в точке $x = \xi$:

$$C_1 y_1(\xi) = C_2 y_2(\xi),$$

и чтобы $G_x'(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ имела скачок, равный $\dfrac{1}{p(\xi)}$:

$$C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Перепишем два последних равенства так:

$$\begin{cases} -C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) = 0, \\ -C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)}. \end{cases} \tag{11}$$

Определитель системы (11) есть определитель Вронского

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x),$$

вычисленный в точке $x = \xi$, для линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (8), а значит, он отличен от нуля:

$$W(\xi) \neq 0,$$

так что величины C_1 и C_2 из системы (11) немедленно определяются:

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)}, \quad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)}.$$

Подставляя выражения для C_1 и C_2 в (10), окончательно получим

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\,y_2(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)}, & a \leqslant x \leqslant \xi, \\[2ex] \dfrac{y_1(\xi)\,y_2(x)}{p(\xi)\,W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{12}$$

Замечание 1. Выбранные нами решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (8) являются линейно независимыми в силу предположения, что $y_1(b) \neq 0$.

В самом деле, все линейно зависимые от $y_1(x)$ решения имеют вид $C_1 y_1(x)$, и, следовательно, при $C_1 \neq 0$ не обращаются в нуль в точке $x = b$, в которой, согласно нашему выбору, обращается в нуль решение $y_2(x)$.

Замечание 2. Краевая задача для уравнения 2-го порядка вида

$$y''(x) + p_1(x)\,y'(x) + p_2(x)\,y(x) = 0 \tag{13}$$

и краевых условий

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \tag{14}$$

сводится к рассмотренной задаче (8)–(9) так:

1) Линейное уравнение (13) приводится к виду (8) путем умножения (13) на $p(x) = e^{\int p_1(x)\,dx}$ (в качестве $q(x)$ надо взять $p(x)p_2(x)$).
2) Краевые условия (14) сводятся к нулевым условиям (9) линейной заменой искомой функции

$$z(x) = y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A.$$

При этой замене линейность уравнения (13) не нарушается, но в отличие от уравнения (8), теперь получаем уравнение с правой частью $L[z] = f(x)$, где

$$f(z) = -\left[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)\right] q(x) - \frac{B-A}{b-a}\,p(x)p_1(x).$$

Однако функцию Грина мы строим для однородной краевой задачи $L[z] = 0$, $z(a) = z(b) = 0$, которая полностью совпадает с задачей (8)–(9).

Пример 1. Построить функцию Грина для однородной краевой задачи

$$y^{\mathrm{IV}}(x) = 0, \tag{15}$$

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0, \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Решение. Сначала покажем, что краевая задача (15)–(16) имеет лишь тривиальное решение. В самом деле, фундаментальная система решений для уравнения (15) есть

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2, \quad y_4(x) = x^3, \tag{17}$$

так что его общее решение имеет вид

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Краевые условия (16) дают нам четыре соотношения для определения A, B, C, D:

$$\begin{aligned} y(0) &= A = 0, \\ y'(0) &= B = 0, \\ y(1) &= A + B + C + D = 0, \\ y'(1) &= B + 2C + 3D = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $A = B = C = D = 0$.

Итак, задача (15)–(16) имеет только нулевое решение $y(x) \equiv 0$, а значит, для нее можно построить (и притом единственную) функцию Грина $G(x, \xi)$.

Теперь построим функцию Грина. Используя фундаментальную систему решений (17), представим искомую функцию Грина $G(x, \xi)$ в виде

$$G(x, \xi) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \tag{18}$$

$$G(x, \xi) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^3 \quad \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1, \tag{19}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 — пока неизвестные функции от ξ. Положим $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ и выпишем систему линейных уравнений для нахождения функций $c_k(\xi)$ (см. систему (5)):

$$\begin{cases} c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 = 0, \\ c_2 + c_3 \cdot 2\xi + c_4 \cdot 3\xi^2 = 0, \\ c_3 \cdot 2 + c_4 \cdot 6\xi = 0, \\ c_4 \cdot 6 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$c_1(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^3, \quad c_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2, \quad c_3(\xi) = -\frac{1}{2}\xi, \quad c_4(\xi) = \frac{1}{6}. \tag{20}$$

Далее воспользуемся свойством 4° функции Грина, а именно тем, что она должна удовлетворять краевым условиям (2), т.е.

$$G(0, \xi) = 0, \quad G'_x(0, \xi) = 0,$$
$$G(1, \xi) = 0, \quad G'_x(1, \xi) = 0.$$

В нашем случае эти соотношения принимают вид

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0, \\ b_2 + 2b_3 + 3b_4 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Используя то, что $c_k = b_k - a_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, из (20) и (21) находим:

$$\begin{cases} a_1 = 0, & b_1 = -\frac{1}{6}\xi^3, \\ a_2 = 0, & b_2 = \frac{1}{2}\xi^2, \\ a_3 = \frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3, & b_3 = \frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2, \\ a_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3, & b_4 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3. \end{cases} \tag{22}$$

Подставив значения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, b_4$ из (22) в (18) и (19), получим искомую функцию Грина:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3\right)x^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x + \left(\frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Последнее выражение легко преобразуется к виду

$$G(x,\xi) = \left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\xi^3 \quad \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1,$$

так что $G(x,\xi) = G(\xi, x)$, т. е. функция Грина симметрична. Это можно было сказать и заранее, так как краевая задача (15)–(16) самосопряженная.

Читателю рекомендуем установить это самостоятельно. Кроме того, советуем проверить, что найденная нами функция Грина удовлетворяет всем требованиям 1°–4°, сформулированным при ее определении. ▷

Пример 2. Построить функцию Грина для дифференциального уравнения

$$xy'' + y' = 0 \tag{23}$$

при следующих условиях:

$$y(x) \text{ ограничено при } x \to 0, \quad y(1) = \alpha y'(1), \quad \alpha \neq 0. \tag{24}$$

Решение. Найдем сначала общее решение уравнения (23) и убедимся, что условия (24) выполняются лишь тогда, когда

$$y(x) \equiv 0.$$

В самом деле, обозначая $y'(x) = z(x)$, получим $xz' + z = 0$, откуда $\ln z = \ln c_1 - \ln x$, $z = \dfrac{c_1}{x}$, а значит,

$$y(x) = c_1 \ln x + c_2. \tag{25}$$

Ясно, что $y(x)$, определяемое формулой (25), удовлетворяет условиям (24) только при $c_1 = c_2 = 0$, а значит, функцию Грина для задачи (23)–(24) можно построить.

Запишем формально $G(x, \xi)$ в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 + a_2 \ln x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \xi, \\ b_1 + b_2 \ln x & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{26}$$

Из непрерывности $G(x, \xi)$ при $x = \xi$ получаем

$$b_1 + b_2 \ln \xi - a_1 - a_2 \ln \xi = 0,$$

а скачок $G'_x(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ равен $\dfrac{1}{\xi}$, так что

$$b_2 \cdot \frac{1}{\xi} - a_2 \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}.$$

Положив

$$c_1 = b_1 - a_1, \quad c_2 = b_2 - a_2, \tag{27}$$

будем иметь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln \xi = 0, \\ \qquad\quad c_2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$c_1 = -\ln \xi, \quad c_2 = 1. \tag{28}$$

Используем теперь условия (24). Ограниченность $G(x, \xi)$ при $x \to 0$ дает нам $a_2 = 0$, а из условия $G(1, \xi) = \alpha G'_x(1, \xi)$ получаем $b_1 = \alpha b_2$. Учитывая (27) и (28), получаем значения всех коэффициентов в (26):

$$a_1 = \alpha + \ln \xi, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = \alpha, \quad b_2 = 1.$$

Итак,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \alpha + \ln \xi, & 0 < x \leqslant \xi, \\ \alpha + \ln x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$ ▷

Пример 3. Найти функцию Грина краевой задачи

$$y''(x) + k^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Решение. Легко убедиться в том, что решение $y_1(x) = \sin kx$ удовлетворяет краевому условию $y_1(0) = 0$, а решение $y_2(x) = \sin k(x-1)$ — условию $y_2(1) = 0$, причем они являются линейно независимыми. Найдем значение определителя Вронского для $\sin kx$ и $\sin k(x-1)$ в точке $x = \xi$:

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \sin k\xi & \sin k(\xi-1) \\ k \cos k\xi & k \cos k(\xi-1) \end{vmatrix} = k[\sin k\xi \cos k(\xi-1) - \sin k(\xi-1) \cos k\xi] = k \sin k.$$

Заметив еще, что в нашем примере $p(x) = 1$, согласно (12) получим

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin k(\xi - 1)\sin kx}{k \sin k}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\sin k\xi \cdot \sin k(x-1)}{k \sin k}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

▷

Пример 4. Найти функцию влияния $G(x, y)$ для балки, лежащей на опорах на обоих концах $x = 0$ и $x = 1$. (Здесь $G(x, y)$ есть смещение параллельно оси Oz поперечного сечения в точке $x = y$, вызванное действием единичной нагрузки, сосредоточенной в точке $x = y$ и действующей параллельно оси Oz.)

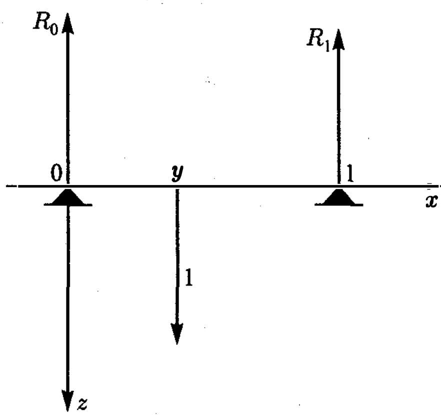

Рис. 5

Решение. Пусть R_0 и R_1 — неизвестные реакции в точках опоры, вызванные действием единичной нагрузки в точке $x = y$ (рис. 5). Тогда изгибающий момент M в точке x балки будет равен

$$M = \begin{cases} -R_0 x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant y, \\ -R_1(1 - x), & \text{если} \quad y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Для равновесия системы трех сил R_0, R_1 и $Q = 1$ должны иметь

$$1 - R_0 - R_1 = 0, \quad R_1 \cdot 1 = 1 \cdot y.$$

Отсюда $R_1 = y$, $R_0 = 1 - y$. Тогда изгибающий момент будет равен

$$M = M(x, y) = \begin{cases} -x(1 - y), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant y, \\ -y(1 - x), & \text{если} \quad y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Следовательно, функция влияния $G(x, y)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению изгибающего момента

$$E_x I_x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = M \tag{29}$$

и граничным условиям

$$G(0, y) \equiv 0, \quad G(1, y) \equiv 0. \tag{30}$$

Здесь E_x — модуль Юнга, I_x — момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси, перпендикулярной к плоскости xOz в точке x.

Для решения граничной задачи (29)–(30) воспользуемся следующим интегралом:

$$M^*(x,y) = \int_0^1 M(x,z)M(z,y)F(z)\,dz,$$

где

$$F(x) = \frac{1}{E_x I_x}.$$

В самом деле, M^* удовлетворяет граничным условиям (30), так как

$$M^*(0,y) = M^*(1,y) \equiv 0.$$

$M^*(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (29), так как это симметричная функция x и y, имеющая при $x \leqslant y$ следующее явное выражение:

$$M^*(x,y) = xy\int_0^1 (1-z)^2 F(z)\,dz - x\int_0^y (1-y)(y-z)F(z)\,dz - \\ - (1-y)\int_0^x z(x-z)F(z)\,dz,$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial M^*}{\partial x} = y\int_0^1 (1-z)^2 F(z)\,dz - \int_0^y (1-y)(y-z)F(z)\,dz - (1-y)\int_0^x zF(z)\,dz,$$

и

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial x^2} = -(1-y)xF(x) = \frac{M(x,y)}{E_x I_x}, \qquad \text{если} \qquad 0 \leqslant x \leqslant y.$$

Поэтому для случая балки, опертой на концах, получаем

$$G(x,y) = \int_0^1 M(x,z)M(z,y)F(z)\,dz.$$

Задачи для самостоятельного решения

В следующих примерах установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее.

190. $y'' = 0$; $\quad y(0) = y'(1),\ y'(0) = y(1)$.

191. $y'' = 0$; $\quad y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$.

192. $y'' + y = 0$; $\quad y(0) = y(\pi) = 0$.

193. $y^{IV} = 0$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

194. $y''' = 0$; $\quad y(0) = y'(1) = 0,\ y'(0) = y(1)$.

195. $y''' = 0$; $\quad y(0) = y(1) = 0,\ y'(0) = y'(1)$.

196. $y'' = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = y'(1)$.

197. $y'' + y' = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

198. $y'' - k^2 y = 0$; $(k \neq 0)$ $y(0) = y(1) = 0$.

199. $y'' + y = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

200. $y''' = 0$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) + y'(1) = 0$.

201. $y'' = 0$; $y'(0) = hy(0)$, $y'(1) = -Hy(1)$.

202. $x^2 y'' + 2xy' = 0$; $y(x)$ ограничено при $x \to 0$, $y(1) = \alpha y'(1)$.

203. $x^3 y^{\mathrm{IV}} + 6x^2 y''' + 6xy'' = 0$; $y(x)$ ограничено при $x \to 0$, $y(1) = y'(1) = 0$.

204. $x^2 y'' + xy' - y = 0$; $y(x)$ ограничено при $x \to 0$, $y(1) = 0$.

205. $xy'' + y' - \dfrac{1}{x} y = 0$; $y(0)$ конечно, $y(1) = 0$.

206. $x^2 y'' + xy' - n^2 y = 0$; $y(0)$ конечно, $y(1) = 0$.

207. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $y(0)$ конечно, $y(1) = 0$.

208. $\dfrac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] = 0$; $y(0) = 0$, $y(1)$ конечно.

209. $xy'' + y' = 0$; $y(0)$ ограничено, $y(l) = 0$.

210. $y'' - y = 0$; $y(0) = y'(0)$, $y(l) + \lambda y'(l) = 0$.
(Рассмотреть случаи: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $|\lambda| \neq 1$.)

211. Найти функцию Грина для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1 + \alpha x)^4 \frac{dy}{dx}\right] = 0, \quad \alpha > 0,$$

$$y(0) = y(l) = 0.$$

§ 15. Применение функции Грина для решения краевых задач

Пусть дано дифференциальное уравнение с правой частью

$$L[y] \equiv p_0(x)\, y^{(n)}(x) + p_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\, y(x) = f(x) \tag{1}$$

и краевые условия

$$V_1(y) = 0, \quad V_2(y) = 0, \quad \ldots, \quad V_n(y) = 0, \tag{2}$$

причем, как и в § 14, мы считаем, что линейные формы $V_1, V_2, \ldots, V_n$ от $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ являются линейно независимыми.

Теорема. *Если $G(x, \xi)$ есть функция Грина однородной краевой задачи*

$$L[y] = 0, \quad V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то решение краевой задачи (1)–(2) *дается формулой*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Пример 1. Используя функцию Грина, решить краевую задачу

$$y''(x) - y(x) = x, \tag{4}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{5}$$

Решение. а) Выясним сначала, существует ли функция Грина для соответствующей однородной краевой задачи

$$ry''(x) - y(x) = 0, \tag{6}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ есть фундаментальная система решений уравнения (6). Значит, общим решением этого уравнения будет

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Краевые условия (5) удовлетворяются тогда и только тогда, когда $A = B = 0$, т. е. $y(x) \equiv 0$. Итак, функция Грина существует.

б) Легко проверить, что

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\xi - 1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(x - 1)}{\operatorname{sh} 1}, & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{8}$$

является функцией Грина для краевой задачи (6)–(7).

в) Решение краевой задачи (4)–(5) пишем в виде

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\, \xi\, d\xi, \tag{9}$$

где $G(x, \xi)$ определена формулой (8).

Разбивая промежуток интегрирования на два и подставляя в (9) выражение для функции Грина из (8), получим

$$y(x) = \int_0^x \frac{\xi \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(x - 1)}{\operatorname{sh} 1}\, d\xi + \int_x^1 \frac{\xi \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\xi - 1)}{\operatorname{sh} 1}\, d\xi =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}(x - 1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \xi \operatorname{sh} \xi\, d\xi + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \xi \operatorname{sh}(\xi - 1)\, d\xi.$$

Но

$$\int_0^x \xi \operatorname{sh} \xi \, d\xi = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x, \qquad \int_x^1 \xi \operatorname{sh}(\xi - 1) \, d\xi = 1 - x \operatorname{ch}(x-1) + \operatorname{sh}(x-1),$$

поэтому

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}\{\operatorname{sh}(x-1)[x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] + \operatorname{sh} x[1 - x \operatorname{ch}(x-1) + \operatorname{sh}(x-1)]\} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - x.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta,$$

а также нечетностью функции $\operatorname{sh} x$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - x$$

удовлетворяет уравнению (4) и краевым условиям (5). ▷

Пример 2. Свести к интегральному уравнению краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения:

$$y'' = f(x, y(x)), \tag{10}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{11}$$

Решение. Строя функцию Грина для задачи

$$y'' = 0, \tag{12}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{13}$$

находим

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (\xi - 1)x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (x-1)\xi, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассматривая правую часть уравнения (10) как известную функцию, получаем

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \, f(\xi, y(\xi)) \, d\xi.$$

Таким образом, решение краевой задачи (10)–(11) сводится к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, ядром которого является функция Грина задачи (12)–(13). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Используя функцию Грина, решить следующие краевые задачи:

212. $y'' + y = x; \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

213. $y^{IV} = 1$; $y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

214. $xy'' + y' = x$; $y(1) = y(e) = 0$.

215. $y'' + \pi^2 y = \cos \pi x$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

216. $y'' - y = 2\,\mathrm{sh}\,1$; $y(0) = y(1) = 0$.

217. $y'' - y = -2e^x$; $y(0) = y'(0)$, $y(l) + y'(l) = 0$.

218. $y'' + y = x^2$; $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

§ 16. Краевые задачи, содержащие параметр, и сведение их к интегральным уравнениям

Во многих вопросах приходится рассматривать краевую задачу вида

$$L[y] = \lambda y + h(x), \tag{1}$$

$$V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где

$$L[y] \equiv p_0(x)\, y^{(n)}(x) + p_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\, y(x),$$

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) +$$
$$+ \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(линейные формы $V_1, V_2, \ldots, V_n$ являются линейно независимыми); $h(x)$ — заданная непрерывная функция от x; λ — некоторый числовой параметр.

При $h(x) \equiv 0$ получается однородная краевая задача

$$L[y] = \lambda y, \quad V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Те значения λ, для которых краевая задача (3) имеет нетривиальные решения $y(x)$, называются *характеристическими числами краевой задачи* (3), а эти нетривиальные решения — соответствующими *собственными функциями*.

Теорема. *Если краевая задача*

$$L[y] = 0, \quad V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет функцию Грина $G(x, \xi)$, то краевая задача (1)–(2) *эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма*

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{4}$$

где

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi.$$

В частности, однородная краевая задача (3) эквивалентна однородному интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Замечание. Так как $G(x, \xi)$ — непрерывное ядро, то к интегральному уравнению применима теория Фредгольма. Поэтому однородное интегральное уравнение (5) может иметь не более счетного числа характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, не имеющих конечной предельной точки. Для всех значений λ, отличных от характеристических, неоднородное уравнение (4) имеет решение при любой непрерывной правой части $f(x)$. Это решение задается формулой

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, \xi; \lambda)\, f(\xi)\, d\xi + f(x),$$

где $R(x, \xi; \lambda)$ — резольвента ядра $G(x, \xi)$. При этом для любых фиксированных значений x и ξ из $[a, b]$ функция $R(x, \xi; \lambda)$ является мероморфной функцией от λ, полюсами которой могут быть лишь характеристические числа однородного интегрального уравнения (5).

Пример 1. Свести краевую задачу

$$y'' + \lambda y = x, \tag{6}$$

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{7}$$

к интегральному уравнению.

Решение. Сначала найдем функцию Грина $G(x, \xi)$ для соответствующей однородной задачи

$$y''(x) = 0,$$

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Так как линейно независимыми решениями уравнения $y''(x) = 0$, удовлетворяющими условиям $y(0) = 0$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, соответственно являются функции $y_1(x) = x$ и $y_2 = x - \frac{\pi}{2}$, то функцию Грина ищем в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\,y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)\,y_2(x)}{W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\pi}\xi - 1\right)x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \left(\dfrac{2}{\pi}x - 1\right)\xi, & \xi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

Далее, пользуясь функцией Грина (8) как ядром интегрального уравнения, получим для $y(x)$ следующее интегральное уравнение:

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$$

где

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} G(x,\xi)\,\xi d\xi = \int_0^{x} \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)\,\xi^2 d\xi + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2\xi}{\pi} - 1\right)\,x\xi\,d\xi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x.$$

Итак, краевая задача (6)–(7) свелась к интегральному уравнению

$$y(x) + \lambda \int_0^{\pi/2} G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Свести к интегральным уравнениям следующие краевые задачи:

219. $y'' = \lambda y + x^2;\quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

220. $y'' = \lambda y + e^x;\quad y(0) = y(1) = 0.$

221. $y'' + \dfrac{\pi^2}{4}y = \lambda y + \cos\dfrac{\pi x}{2}$; $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$.

222. $y'' + \lambda y = 2x + 1$; $y(0) = y'(1)$, $y'(0) = y(1)$.

223. $y^{\text{IV}} = \lambda y + 1$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(1) = y'''(1) = 0$.

224. $y''' + \lambda y = 2x$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = y'(1)$.

225. $y' + \lambda y = e^x$; $y(0) = y'(0)$, $y(1) = y'(1)$.

226. Преобразовать дифференциальное уравнение (получающееся из волнового уравнения Шредингера с мезонным потенциалом)

$$\frac{d^2y}{dr^2} - k^2y(r) + V_0\frac{e^{-r}}{r}y(r) = 0$$

(V_0 и k^2 — постоянные), решение которого удовлетворяет граничным условиям

$$y(0) = y(+\infty) = 0,$$

в интегральное уравнение

$$y(r) = V_0\int\limits_0^{+\infty} G(r,\xi)\frac{e^{-\xi}}{\xi}y(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(r,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}e^{-k\xi}\operatorname{sh} kr, & 0 \leqslant r \leqslant \xi, \\ \dfrac{1}{k}e^{-kr}\operatorname{sh} k\xi, & \xi \leqslant r \leqslant +\infty. \end{cases}$$

ГЛАВА 3 Применение интегральных преобразований к решению интегральных уравнений

§ 17. Применение преобразования Фурье к решению некоторых интегральных уравнений

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и $K(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Применяя преобразование Фурье и используя теорему о свертке, получим

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \sqrt{2\pi}\,\Phi(\omega)\widetilde{K}(\omega), \tag{2}$$

где $\Phi(\omega)$, $F(\omega)$, $\widetilde{K}(\omega)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(x)$, $f(x)$, $K(x)$ соответственно. Из равенства (2) при условии $1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega) \neq 0$ находим

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega)}.$$

Применяя формулу обращения преобразования Фурье, получим решение уравнения (1):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega)} e^{ix\omega}\,d\omega.$$

Если $1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega) = 0$ при некоторых вещественных значениях ω, то уравнение (1), вообще говоря, не имеет абсолютно интегрируемого на всей оси Ox решения.

Аналогично решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x).$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{\widetilde{K}(\omega)} e^{ix\omega}\, d\omega.$$

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|} \varphi(t)\, dt \quad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right).$$

Решение. Пусть $F(\omega)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$, $\widetilde{K}(\omega)$ — преобразование Фурье ядра $K(x) = e^{-|x|}$. Здесь

$$\widetilde{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ix\omega}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}\, dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i\omega)}\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{1+\omega^2}.$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям данного уравнения, получим

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}\, \Phi(\omega)\sqrt{2\pi},$$

откуда

$$\Phi(\omega) = \frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2}\, F(\omega).$$

Следовательно, решением исходного уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2}\, F(\omega) e^{ix\omega}\, d\omega. \tag{3}$$

Заметим, что в данном случае

$$1 - \sqrt{2\pi}\, \widetilde{K}(\omega)\lambda = 1 - \frac{2\lambda}{1+\omega^2} = \frac{1-2\lambda+\omega^2}{1+\omega^2}$$

при $\lambda < \dfrac{1}{2}$ не обращается в нуль ни при каком вещественном значении ω. Полагая, например, $f(x) = e^{-|x|}$, будем иметь

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{1+\omega^2}.$$

Так что формула (3) дает

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\omega}}{1-2\lambda+\omega^2}\, d\omega.$$

К вычислению последнего интеграла применим метод контурного интегрирования. Это дает

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}} \quad \text{для} \quad x \geqslant 0,$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}} \quad \text{для} \quad x < 0,$$

короче,

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x|}}{\sqrt{1-2\lambda}}. \qquad \triangleright$$

Пример 2. Плоское электростатическое поле между двумя заземленными параллельными плоскостями $(0 < y < h)$ создается линейными источниками, собственное поле которых в неограниченном пространстве есть $\vec{E}$.

Найти плотность распределения индуцированных зарядов на поверхности каждой из пластин $\sigma_0(x)$ и $\sigma_h(x)$.

Решение. Известно, что если цилиндрический проводник с сечением, ограниченным произвольным контуром L, внесен в заданное плоское поле $\vec{E}$, то плотность распределения индуцированных зарядов удовлетворяет интегральному уравнению

$$\sigma(N) = \frac{E_n(N)}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\sigma(M)}{|MN|^2}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \vec{n}}\right) dl, \tag{4}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к контуру L в точке N, E_n — проекция внешнего поля на нормаль.

Пользуясь формулой (4), составим интегральное уравнение для искомых плотностей зарядов. Выберем фиксированную точку $M(x)$ на плоскости $y = 0$. Тогда, если переменная точка $N(\xi)$ также находится на плоскости $y = 0$, то $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \vec{n}}\right) = 0$; если же точка $N(\xi)$ принадлежит плоскости $y = h$, то (рис. 6)

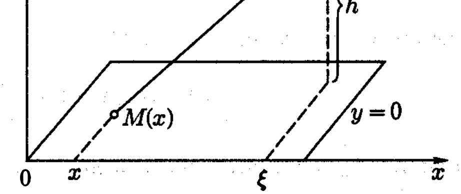

Рис. 6

$$|MN| = \sqrt{(\xi - x)^2 + h^2},$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \vec{n}}\right) = -\frac{h}{|MN|}.$$

Таким образом, интегральное уравнение (1) принимает вид

$$\sigma_0(x) = \frac{(E_y)_{y=0}}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_h(\xi)}{(\xi - x)^2 + h^2}\, d\xi. \tag{5}$$

Аналогично, выбирая точку $M(x)$ на плоскости $y = h$, получим интегральное уравнение

$$\sigma_h(x) = -\frac{(E_y)_{y=h}}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_0(\xi)}{(\xi - x)^2 + h^2}\,d\xi. \tag{5'}$$

Систему интегральных уравнений (5)–(5′) относительно функций $\sigma_0(x)$ и $\sigma_h(x)$ будем решать с помощью преобразования Фурье. Для этого умножим каждое из уравнений на $e^{i\lambda x}$ и проинтегрируем по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$. Обозначая

$$\widetilde{f} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx$$

и полагая для сокращения записи $(E_y)_{y=0} = f_0(x)$, $(E_y)_{y=h} = f_h(x)$, будем иметь

$$\widetilde{\sigma}_0 = \frac{\widetilde{f}_0}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_h(\xi)\,d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2},$$

$$\widetilde{\sigma}_h = -\frac{\widetilde{f}_h}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_0(\xi)\,d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2}.$$

Меняя порядок интегрирования и воспользовавшись формулой

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda t\,dt}{t^2 + h^2} = \frac{\pi}{2h}e^{-|\lambda|h},$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_h$:

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma}_0 + \widetilde{\sigma}_h e^{-|\lambda|h} = \dfrac{\widetilde{f}_0}{2\pi}, \\[2ex] \widetilde{\sigma}_0 e^{-|\lambda|h} + \widetilde{\sigma}_h = -\dfrac{\widetilde{f}_h}{2\pi}, \end{cases}$$

решая которую, получим

$$\widetilde{\sigma}_0 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_h e^{-|\lambda|h}}{1 - e^{-2|\lambda|h}}, \qquad \widetilde{\sigma}_h = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\widetilde{f}_0 e^{-|\lambda|h} + \widetilde{f}_h}{1 - e^{-2|\lambda|h}}.$$

Применяя формулу обращения Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda,$$

получим

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_h e^{-|\lambda|h}}{1 - e^{-|\lambda|h}}\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda, \quad \sigma_h(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{f}_h + \widetilde{f}_0 e^{-|\lambda|h}}{1 - e^{-|\lambda|h}}\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения

227. $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt \quad \left(\lambda<\frac{1}{2}\right)$, где $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{для} \quad x>0, \\ 0 & \text{для} \quad x<0. \end{cases}$

228. $\varphi(x)=f(x)+\frac{3}{8}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt$, где $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad x>0, \\ e^{x} & \text{для} \quad x<0. \end{cases}$

229. $\varphi(x)=f(x)-\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\varphi(t)\,dt.$

Синус- и косинус-преобразования Фурье

Функция

$$\Phi_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(t)\sin xt\,dt$$

называется *синус-преобразованием Фурье функции* $\varphi(x)$.

Функция

$$\Phi_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(t)\cos xt\,dt$$

называется *косинус-преобразованием Фурье функции* $\varphi(x)$.

Имеют место следующие формулы обращения синус- и косинус-преобразований Фурье:

$$\begin{cases} \varphi(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_s(x)\sin tx\,dx, \\ \varphi(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_c(x)\cos tx\,dx. \end{cases} \tag{6}$$

Замечание. Если $\varphi(t)$ — четная функция, то $\Phi(x)=\Phi_c(x)$; если же $\varphi(t)$ — нечетная функция, то $\Phi(x)=i\Phi_s(x)$, где $\Phi(x)$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(t)$; а $\Phi_s(x)$ и $\Phi_c(x)$ являются соответственно синус- и косинус-преобразованиями Фурье функции $\varphi(t)$.

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\sin xt\,dt = e^{-x} \quad (x > 0).$$

Решение. Функция $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}$, очевидно, является синус-преобразованием Фурье искомой функции $\varphi(t)$. Применяя формулу (6) обращения синус-преобразования Фурье, будем иметь

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}\sin xt\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin xt\,dx. \tag{7}$$

Интеграл в правой части (7) вычисляем с помощью двукратного интегрирования по частям. Получим

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin tx\,dx = \frac{t}{1+t^2},$$

так что

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\frac{t}{1+t^2}. \qquad \triangleright$$

Пример 4. В задачах о колебаниях тонкой упругой пластины приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\psi(t) = \frac{1}{2bt}\int_0^{+\infty} xf(x)\sin\frac{x^2}{4bt}\,dx, \tag{8}$$

где $f(x)$ — искомая функция, $\psi(t)$ — известная функция.

Решение. Уравнение (8) — это интегральное уравнение 1-го рода. Полагая

$$t = \frac{1}{4b\alpha}, \quad x^2 = v,$$

преобразуем уравнение (8) к виду

$$\frac{1}{\alpha}\psi\left(\frac{1}{4b\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} f(\sqrt{v})\sin\alpha v\,dv.$$

Используя формулу обращения для синус-преобразования Фурье, получим

$$f(\sqrt{v}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\psi\left(\frac{1}{4b\alpha}\right)\frac{\sin\alpha v}{\alpha}\,d\alpha,$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)}{t}\sin\frac{x^2}{4bt}\,dt. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения:

230. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos xt\,dt = \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0).$

231. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\sin xt\,dt = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi, \end{cases}$

232. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos xt\,dt = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

233. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos xt\,dt = e^{-x}\cos x \quad (x > 0).$

§ 18. Применение преобразования Лапласа к решению некоторых интегральных уравнений

1°. Интегральные уравнения Вольтерра типа свертки.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

ядро которого зависит лишь от разности $x - t$. Будем называть уравнение (1) *интегральным уравнением типа свертки.*

Пусть $f(x)$ и $K(x)$ — достаточно гладкие функции, растущие при $x \to \infty$ не быстрее показательной функции, так что

$$|f(x)| \leqslant M_1 e^{s_1 x}, \quad |K(x)| \leqslant M_2 e^{s_2 x}. \tag{2}$$

Можно показать, что в этом случае и функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять оценке типа (2):

$$|\varphi(x)| \leqslant M_3 e^{s_3 x}.$$

Следовательно, может быть найдено изображение по Лапласу функций $f(x)$, $K(x)$ и $\varphi(x)$ (оно будет определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > \max\{s_1, s_2, s_3\}$).

Пусть

$$f(x) \risingdotseq F(p), \quad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p), \quad K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(p).$$

Применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и используя теорему умножения, найдем

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)\Phi(p).$$

Отсюда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \widetilde{K}(p)} \quad (\widetilde{K}(p) \neq 1).$$

Оригинал $\varphi(x)$ для $\Phi(p)$ будет решением интегрального уравнения (1).

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Решение. Известно, что

$$\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos x \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}.$$

Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и учитывая при этом теорему умножения (изображение свертки), получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1}\,\Phi(p).$$

Отсюда

$$\Phi(p)\left[1 - \frac{2p}{p^2+1}\right] = \frac{1}{p^2+1},$$

или

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq xe^x.$$

Следовательно, решение данного интегрального уравнения есть

$$\varphi(x) = xe^x. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения:

234. $\varphi(x) = e^x - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

235. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

236. $\varphi(x) = e^{2x} + \int\limits_0^x e^{t-x}\varphi(t)\,dt.$ **237.** $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

238. $\varphi(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x-t)\cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

239. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x e^{-2(x-t)}\varphi(t)\,dt.$ **240.** $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

241. $\varphi(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ **242.** $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

243. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int\limits_0^x \left[3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

244. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ **245.** $\varphi(x) = 1 + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

246. $\varphi(x) = e^x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ **247.** $\varphi(x) = \cos x + \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt.$

Теорема о свертке может быть использована также для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt. \qquad (3)$$

Пусть

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p), \qquad f(x) \risingdotseq F(p).$$

Тогда в силу уравнения (3)

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda\Phi^2(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda F(p)}}{2\lambda}.$$

Оригинал для $\Phi(p)$, если он существует, будет решением интегрального уравнения (3).

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt = \frac{x^3}{6}. \tag{4}$$

Решение. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi^2(p) = \frac{1}{p^4},$$

откуда

$$\Phi(p) = \pm\frac{1}{p^2}.$$

Функции $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = -x$ будут решениями уравнения (4) (решение уравнения (4) не единственно). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

248. $2\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt = \sin x.$

249. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt - \frac{1}{2}\operatorname{sh} x.$

2°. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свертки. Преобразование Лапласа может быть использовано при решении систем интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\int_0^x K_{ij}(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{5}$$

где $K_{ij}(x)$, $f_i(x)$ — известные непрерывные функции, имеющие изображение по Лапласу.

Применив к обеим частям (5) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{s}\widetilde{K}_{ij}(p)\,\Phi_j(p) \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_j(p)$. Решая ее, найдем $\Phi_j(p)$, оригиналы для которых и будут решениями исходной системы интегральных уравнений (5).

Пример 3. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2\displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{cases} \qquad (6)$$

Решение. Переходя к изображениям и используя теорему об изображении свертки, получим

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p-2}\,\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\,\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{1}{p}\,\Phi_1(p) + \dfrac{4}{p^2}\,\Phi_2(p). \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$, найдем

$$\Phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\Phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ равны соответственно

$$\varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{8}{9}\,e^{2x} + \frac{1}{3}\,xe^{-x} - \frac{8}{9}\,e^{-x}.$$

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ дают решение исходной системы интегральных уравнений (6). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие системы интегральных уравнений:

250. $\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$

251. $\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \displaystyle\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$

252. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

253. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{t-x}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

254. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

255. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int\limits_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

256. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int\limits_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x + \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

3°. Интегро-дифференциальные уравнения. Пусть имеем линейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n\varphi(x) + \sum_{m=0}^{s}\int\limits_0^x K_m(x-t)\,\varphi^{(m)}(t)\,dt = f(x), \qquad (7)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные, $f(x)$, $K_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots, s)$ — известные функции, $\varphi(x)$ — искомая функция.

Для искомой функции $\varphi(x)$ ставятся начальные условия вида

$$\varphi(0)=\varphi_0, \quad \varphi'(0)=\varphi_0', \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}. \tag{8}$$

Пусть функции $f(x)$ и $K_m(x)$ являются функциями-оригиналами и

$$f(x) \risingdotseq F(p), \quad K_m(x) \risingdotseq \widetilde{K}_m(p) \quad (m=0,1,\ldots,s).$$

Тогда функция $\varphi(x)$ будет иметь изображение по Лапласу $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя к обеим частям (7) преобразование Лапласа и используя теорему об изображении производной и теорему умножения, придем к уравнению

$$\Phi(p)\left[p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n+\sum_{m=0}^{s}\widetilde{K}_m(p)\,p^m\right]=A(p), \tag{9}$$

где $A(p)$ — некоторая известная функция от p. Из (9) находим $\Phi(p)$ — операторное решение задачи (7)–(8). Функция $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$ будет решением интегро-дифференциального уравнения (7), удовлетворяющим начальным условиям (8).

Пример 4. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x)+\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt=e^{2x}, \tag{10}$$

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0. \tag{11}$$

<u>*Решение*</u>. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. В силу (11)

$$\varphi'(x) \risingdotseq p\Phi(p), \quad \varphi''(x) \risingdotseq p^2\Phi(p).$$

Поэтому после применения преобразования Лапласа уравнение (10) примет вид

$$p^2\Phi(p)+\frac{p}{p-2}\,\Phi(p)=\frac{1}{p-2},$$

или

$$\Phi(p)\frac{p(p-1)^2}{p-2}=\frac{1}{p-2}. \tag{12}$$

Из (12) находим

$$\Phi(p)=\frac{1}{p(p-1)^2} \risingdotseq xe^x-e^x+1.$$

Следовательно, решение $\varphi(x)$ интегро-дифференциального уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям (11), определяется равенством

$$\varphi(x)=xe^x-e^x+1.$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегро-дифференциальные уравнения:

257. $\varphi''(x) + \int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt = e^{2x}; \quad \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1.$

258. $\varphi'(x) - \varphi(x) + \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi'(t)\,dt - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt = x; \quad \varphi(0) = -1.$

259. $\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi''(t)\,dt + 2\int\limits_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \cos x;$
$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$

260. $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 2\int\limits_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \cos x; \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$

281. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x;$
$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$

262. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x; \quad \varphi(0) = -1,$
$\varphi'(0) = 1.$

4°. Интегральные уравнения Вольтерра с пределами $(x, +\infty)$. Интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_x^{+\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{13}$$

возникающие в ряде задач физики, можно также решать с помощью преобразования Лапласа.

Справедлива следующая формула:

$$\int\limits_x^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)\,dt \risingdotseq \overline{\mathcal{K}}(-p)\Phi(p), \tag{14}$$

где

$$\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p), \quad \widetilde{\mathcal{K}}(-p) = \int_0^{+\infty} K(-x)e^{px}\,dx.$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (13) и используя формулу (14), получим

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{\mathcal{K}}(-p)\Phi(p),$$

или

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \widetilde{\mathcal{K}}(-p)} \quad \left(\widetilde{\mathcal{K}}(-p) \neq 1\right).$$

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(p)}{1 - \widetilde{\mathcal{K}}(-p)} e^{px}\,dp \tag{15}$$

является частным решением интегрального уравнения (13). Подчеркнем, что для того, чтобы решение (15) имело смысл, необходимо, чтобы области аналитичности $\widetilde{\mathcal{K}}(-p)$ и $F(p)$ перекрывались.

Пример 5. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_x^{\infty} e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt. \tag{16}$$

<u>*Решение.*</u> В данном случае $f(x) = x$, $K(x) = e^{2x}$. Поэтому

$$F(p) = \frac{1}{p^2}, \quad \widetilde{\mathcal{K}}(-p) = \int_0^{\infty} e^{-2x}e^{px}\,dx = \frac{1}{2-p}, \quad \operatorname{Re} p < 2.$$

Таким образом, получаем следующее операторное уравнение:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2-p}\Phi(p),$$

так что

$$\Phi(p) = \frac{p-2}{p^2(p-1)}.$$

Отсюда

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\,dp \quad (0 < \gamma < 2). \tag{17}$$

Интеграл (17) можно вычислить по интегральной формуле Коши. Подынтегральная функция имеет двукратный полюс $p = 0$ и простой полюс $p = 1$, который появляется при $\gamma > 1$, что связано с включением или невключением в решение уравнения (16) решения соответствуюшего однородного уравнения

$$\varphi(x) = \int_x^\infty e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt.$$

Найдем вычеты подынтегральной функции в ее полюсах:

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right) = 2x+1, \quad \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right) = -e^x.$$

Следовательно, решение интегрального уравнения (16) есть $\varphi(x) = 2x + 1 + Ce^x$ (C — произвольная постоянная). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

263. $\varphi(x) = e^{-x} + \int_x^\infty \varphi(t)\,dt.$

264. $\varphi(x) = e^{-x} + \int_x^\infty e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

265. $\varphi(x) = \cos x + \int_x^\infty e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

266. $\varphi(x) = 1 + \int_x^\infty e^{\alpha(x-t)}\varphi(t)\,dt \quad (\alpha > 0).$

5°. Обобщенная теорема умножения и некоторые ее применения. Пусть

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p), \quad u(x,\tau) \risingdotseq U(p)e^{-\tau q(p)},$$

где $U(p)$ и $q(p)$ — аналитические функции. Тогда

$$\Phi(q(p))U(p) \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)u(x,\tau)\,d\tau.$$

Это и есть *обобщенная теорема умножения* (*теорема Эфроса*). Если $u(x,\tau) = u(x-\tau)$, то $q(p) \equiv p$, и мы получаем обычную теорему умножения:

$$\Phi(p)\cdot U(p) \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)u(x-\tau)\,d\tau.$$

Если $U(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, то

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\tau^2/(4x)}.$$

Поэтому, если известно, что $\Phi(p) \risingdotseq \varphi(x)$, то по теореме Эфроса находим оригинал для $\dfrac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int\limits_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{-\tau^2/(4x)}\, d\tau. \tag{18}$$

Пример 6. Решить интегральное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2/(4x)} \varphi(t)\, dt = 1. \tag{19}$$

Решение. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (19), получим, согласно формуле (18),

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p},$$

откуда

$$\frac{\Phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2}, \quad \text{или} \quad \Phi(p) = \frac{1}{p} \risingdotseq 1.$$

Следовательно, $\varphi(x) \equiv 1$ есть решение уравнения (19). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения:

267. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \displaystyle\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2/(4x)} \varphi(t)\, dt = e^{-x}$.

268. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \displaystyle\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2/(4x)} \varphi(t)\, dt = 2x - \operatorname{sh} x$.

269. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \displaystyle\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2/(4x)} \varphi(t)\, dt = x^{3/2} + e^{4x}$.

Известно, что

$$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $J_n(z)$ — бесселева функция 1-го рода порядка n. В частности,

$$J_0(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-1/p}.$$

В силу теоремы подобия

$$J_0(2\sqrt{xt}) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-x/p},$$

откуда видно, что для теоремы Эфроса следует взять в таком случае

$$q(p) \equiv \frac{1}{p}.$$

Пример 7. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = xe^{-x} + \lambda\int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\varphi(t)\,dt \quad (|\lambda| \neq 1). \tag{20}$$

Решение. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя к обеим частям (20) преобразование Лапласа и учитывая теорему Эфроса, найдем

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \lambda\frac{1}{p}\Phi\left(\frac{1}{p}\right). \tag{21}$$

Заменяя p на $\dfrac{1}{p}$, получим

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p\Phi(p). \tag{22}$$

Из (21) и (22) находим

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda}{p}\left[\frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p\Phi(p)\right],$$

или

$$\Phi(p) = \frac{1}{1-\lambda^2} + \left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda p}{(p+1)^2}\right].$$

Отсюда

$$\varphi(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения ($\lambda \neq \pm 1$):

270. $\varphi(x) = e^x + \lambda\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{\frac{x}{t}}\,J_1(2\sqrt{xt})\varphi(t)\,dt.$

271. $\varphi(x) = \cos x + \lambda \int\limits_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\varphi(t)\,dt.$

272. $\varphi(x) = \cos x + \lambda \int\limits_0^\infty \frac{x}{t} J_2(2\sqrt{xt})\varphi(t)\,dt.$

273. $\varphi(x) = \sin x + \lambda \int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{x}{t}}\, J_1(2\sqrt{xt})\varphi(t)\,dt.$

§ 19. Применение преобразования Меллина к решению некоторых интегральных уравнений

Пусть функция $f(t)$ определена при положительных t и удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^1 |f(t)|t^{\sigma_1-1}\,dt < +\infty, \qquad \int\limits_1^\infty |f(t)|t^{\sigma_2-1}\,dt < +\infty \tag{1}$$

при надлежащем выборе чисел σ_1 и σ_2. *Преобразованием Меллина* функции $f(t)$ называется функция

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)t^{s-1}\,dt \quad (s = \sigma + i\tau,\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2). \tag{2}$$

Формула обращения преобразования Меллина имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)t^{-s}\,ds \quad (t > 0,\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2), \tag{3}$$

где интеграл берется вдоль прямой l: $\operatorname{Re} s = \sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s, и понимается в смысле главного значения. В случае, когда поведение функции $f(t)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$ известно, например, из физических соображений, границы полосы (σ_1, σ_2) могут быть установлены из условий абсолютной сходимости интеграла (2). Если же поведение $f(t)$ известно лишь на одном конце интервала $(0, +\infty)$, например, при $t \to 0$, то определяется только σ_1, прямая интегрирования l в (3) должна быть выбрана правее прямой $\sigma = \sigma_1$ и левее ближайшей особой точки функции $F(s)$.

Преобразование Меллина тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа, и многие теоремы, относящиеся к преобразованию Меллина, могут быть получены из соответствующих теорем для преобразований Фурье и Лапласа путем замены переменных.

Теорема о свертке для преобразования Меллина имеет следующий вид:

$$M\left\{\int_0^\infty f(t)\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\} = F(s)\cdot\Phi(s). \tag{4}$$

Отсюда можно заключить, что преобразование Меллина удобно применять при решении интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

В самом деле, пусть функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x)$ допускают преобразование Меллина и пусть $\varphi(x) \to \Phi(s)$, $f(x) \to F(s)$, $K(x) \to \widetilde{K}(s)$, причем области аналитичности $F(s)$ и $\widetilde{K}(s)$ имеют общую полосу $\sigma_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \sigma_2$. Применяя к обеим частям уравнения (5) преобразование Меллина и используя теорему о свертке (4), получим

$$\Phi(s) = F(s) + \widetilde{K}(s)\cdot\Phi(s),$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1-\widetilde{K}(s)} \qquad \left(\widetilde{K}(s)\neq 1\right).$$

Это — операторное решение интегрального уравнения (5). По формуле обращения (3) находим решение $\varphi(x)$ этого уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(s)}{1-\widetilde{K}(s)}x^{-s}\,ds.$$

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K(x\cdot t)\varphi(t)\,dt \tag{6}$$

(уравнение Фокса). Умножая обе части (6) на x^{s-1} и интегрируя по x в пределах от 0 до ∞, получим

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx + \int_0^\infty \varphi(t)\,dt\int_0^\infty K(x\cdot t)x^{s-1}\,dx.$$

Обозначая преобразование Меллина функций $\varphi(x)$, $f(x)$, $K(x)$ соответственно через $\Phi(s)$, $F(s)$, $\widetilde{K}(s)$, после несложных преобразований получим

$$\Phi(s) = F(s) + \widetilde{K}(s) \int_0^\infty \varphi(t) t^{-s}\, dt. \tag{7}$$

Легко видеть, что $\int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{-s}\, dt = \Phi(1-s)$, так что (7) запишется в виде

$$\Phi(s) = F(s) + \Phi(1-s)\widetilde{K}(s). \tag{8}$$

Заменяя в равенстве (8) s на $1-s$, получим

$$\Phi(1-s) = F(1-s) + \Phi(s)\widetilde{K}(1-s). \tag{9}$$

Из равенства (8) и (9) находим

$$\Phi(s) = F(s) + F(1-s)\widetilde{K}(s) + \Phi(s)\widetilde{K}(s)\widetilde{K}(1-s),$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\widetilde{K}(s)}{1 - \widetilde{K}(s)\cdot\widetilde{K}(1-s)}. \tag{10}$$

Это — операторное решение уравнения (6).

По формуле обращения Меллина найдем

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s) + F(1-s)\widetilde{K}(s)}{1 - \widetilde{K}(s)\cdot\widetilde{K}(1-s)} x^{-s}\, ds$$

— решение интегрального уравнения (6).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\, dt. \tag{11}$$

Решение. Имеем

$$\widetilde{K}(s) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1}\cos x\, dx. \tag{12}$$

Для вычисления интеграла (12) воспользуемся тем, что

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\, dx = \Gamma(z). \tag{13}$$

Поворачивая в формуле (13) луч интегрирования до мнимой оси, что в силу леммы Жордана возможно при $0 < z < 1$, приходим к формуле

$$\int_0^\infty e^{-ix}x^{z-1}\,dx = e^{-i\pi z/2}\Gamma(z).$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\int_0^\infty x^{z-1}\cos x\,dx = \cos\frac{\pi z}{2}\cdot\Gamma(z),\qquad \int_0^\infty x^{z-1}\sin x\,dx = \sin\frac{\pi z}{2}\cdot\Gamma(z). \tag{14}$$

Таким образом, в силу (12) и (14)

$$\widetilde{K}(s) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}.$$

Далее,

$$\widetilde{K}(s)\cdot\widetilde{K}(1-s) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\pi}2\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \lambda^2,$$

так как $\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin\pi s}$. Следовательно, если $M\{f(x)\} = F(s)$, то в силу формулы (10) (при $|\lambda| \neq 1$)

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\widetilde{K}(s)}{1-\lambda^2},$$

и потому

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[F(s) + F(1-s)\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\right]x^{-s}\,ds =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)x^{-s}\,ds +$$

$$+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}F(1-s)x^{-s}\,ds. \tag{15}$$

Заменим во втором интеграле правой части (15) $F(1-s)$ на $\int\limits_0^\infty f(t)t^{-s}\,dt$ и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)x^{-s}\,ds = f(x).$$

Тогда формула (15) перепишется так:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}(xt)^{-s}\,ds \int\limits_0^{\infty} f(t)\,dt.$$

Согласно формуле обращения Меллина

$$\frac{1}{\pi i 2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}(xt)^{-s}\,ds = \cos xt,$$

так что окончательно решением уравнения (11) будет

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos xt\,dt.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

274. $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\cos xt\,dt.$

275. $\varphi(x) = f(x) + \lambda\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\sin xt\,dt.$

276. $\varphi(x) = -e^{-x} + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\cos xt\,dt.$

ГЛАВА 4 Интегральные уравнения 1-го рода

§ 20. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad f(0)=0, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция.

Предположим, что $K(x,t)$, $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$. Дифференцируя обе части (1) по x, получим

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\varphi(t)\,dt = f'(x). \tag{2}$$

Всякое непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$ решение $\varphi(x)$ уравнения (1) удовлетворяет, очевидно, и уравнению (2). И наоборот, всякое непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$ решение уравнения (2) удовлетворяет также уравнению (1).

Если $K(x,x)$ не обращается в нуль ни в одной точке основного интервала $[0,a]$, то уравнение (2) можно переписать так:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)}\varphi(t)\,dt, \tag{3}$$

т. е. оно сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, рассмотренному выше.

Если $K(x,x) \equiv 0$, то иногда бывает полезно еще раз продифференцировать уравнение (2) по x и т. д.

Замечание. Если $K(x,x)$ обращается в нуль в некоторой точке $x \in [0,a]$, например в точке $x=0$, то уравнение (3) приобретает особые свойства, совершенно отличные от свойств уравнения 2-го рода. (Такие уравнения Пикар назвал уравнениями 3-го рода.) Здесь возникают осложнения, подобные тем, которые бывают связаны с обращением в нуль коэффициента при старшей производной в линейном дифференциальном уравнении.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x. \tag{4}$$

Решение. Функции $f(x) = x$, $K(x,t) = \cos(x-t)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям непрерывности и дифференцируемости.

Дифференцируя обе части (4) по x, получим

$$\varphi(x)\cos 0 - \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = 1,$$

или

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{5}$$

Уравнение (5) есть интегральное уравнение 2-го рода типа свертки.

Применяя преобразование Лапласа, найдем его решение:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1}\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{p^2+1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} \risingdotseq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Функция $\varphi(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ будет решением уравнения (5), а следовательно, и исходного уравнения (4), в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения 1-го рода, предварительно сведя их к интегральным уравнениям 2-го рода:

277. $\displaystyle\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

278. $\displaystyle\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$

279. $\displaystyle\int_0^x a^{x-t}\varphi(t)\,dt = f(x), \quad f(0) = 0.$

280. $\displaystyle\int_0^x (1 - x^2 + t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^2}{2}.$

281. $\displaystyle\int_0^x (2 + x^2 - t^2)\,\varphi(t)\,dt = x^2.$

282. $\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = e^{x^2/2} - 1.$

283. Свести к уравнению Вольтерра 2-го рода уравнение

$$\int_a^x \frac{H(x, s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s)\, ds = f(x)$$

в предположении, что $H(x, s)$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируемы, $f(a) = 0$, $H(a, a) \neq 0$ и $0 < \alpha < 1$.

---

§ 21. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода типа свертки

Интегральное уравнение 1-го рода

$$\int_0^x K(x-t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{1}$$

у которого ядро $K(x, t)$ зависит лишь от разности аргументов $x - t$, будем называть *интегральным уравнением 1-го рода типа свертки.*

К этому классу уравнений относится, например, обобщенное уравнение Абеля.

Рассмотрим одну **задачу**, приводящую к интегральному уравнению Вольтерра типа свертки.

Магазин покупает и продает различные товары. Предполагается, что:

1) покупка и продажа суть непрерывные процессы, и купленные товары немедленно поступают в продажу;
2) магазин приобретает каждую новую партию любого товара в таком количестве, какое он может продать в промежуток времени T, один и тот же для всех покупок;
3) каждая новая партия товара распродается равномерно в течение времени T.

Магазин начинает продажу новой партии товара, общая стоимость которого равна единице. Требуется найти закон $\varphi(t)$, по которому он должен производить покупки, для того чтобы стоимость наличного товара оставалась постоянной.

Решение. Пусть стоимость первоначального товара, оставшегося к моменту t, равна $K(t)$, где

$$K(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{T}, & t \leqslant T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Предположим, что в промежуток времени от τ до $\tau + d\tau$ покупается товаров на сумму $\varphi(\tau)\,d\tau$. Этот запас уменьшается вследствие продажи таким образом, что стоимость остатка к моменту $t > \tau$ равна $K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$. Поэтому стоимость непроданной части товаров, приобретенных путем покупок, будет к любому моменту t равна

$$\int_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $\varphi(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$1 - K(t) = \int_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Мы получили интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода типа свертки.

Пусть $f(x)$ и $K(x)$ — функции-оригиналы, и пусть

$$f(x) \risingdotseq F(p),$$

$$K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(p),$$

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p).$$

Применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, будем иметь

$$\widetilde{K}(p)\cdot\Phi(p) = F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{\widetilde{K}(p)} \quad \left(\widetilde{K}(p) \neq 0\right). \tag{2}$$

Оригинал $\varphi(x)$ для функции $\Phi(p)$, определяемой равенством (2), будет решением интегрального уравнения (1). ▷

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x. \tag{3}$$

Решение. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (3), получим

$$\frac{1}{p-1}\,\Phi(p) = \frac{1}{p^2},$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \risingdotseq 1 - x.$$

Функция $\varphi(x) = 1 - x$ есть решение уравнения (3). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

284. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

285. $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$

286. $\int\limits_0^x (x-t)^{1/2}\varphi(t)\,dt = x^{5/2}.$

287. $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

288. $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x^2.$

289. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x\sin x.$

290. $\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^3e^{-x}.$

291. $\int\limits_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

292. $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x.$

293. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

294. $\int\limits_0^x (x^2-t^2)\,\varphi(t)\,dt = \dfrac{x^3}{3}.$

295. $\int\limits_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = \dfrac{x^4}{12}.$

296. $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = x^2J_4(2\sqrt{x}).$

297. $\int\limits_0^x (x-2t)\,\varphi(t)\,dt = -\dfrac{x^3}{6}.$

Замечание. Если $K(x,x) = K(0) \neq 0$, то уравнение (1) заведомо имеет решение. В задаче 290 ядро $K(x,t)$ обращается тождественно в нуль при $t = x$, но тем не менее решение этого уравнения существует.

Как уже отмечалось выше, необходимое условие существования непрерывного решения интегрального уравнения вида

$$\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{4}$$

состоит в том, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно, и все ее $n-1$ первых производных обращаются в нуль при $x=0$.

Это «модельное» уравнение (4) указывает на необходимость согласования порядков обращения в нуль ядра при $t=x$ и правой части $f(x)$ при $x=0$ (превышение должно быть за правой частью по крайней мере на 1).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x. \tag{5}$$

Здесь $f(x)=x$, $n=2$. Очевидно, $f(x)$ имеет производные всех порядков, но ее первая производная $f'(x)=1\neq 0$, т. е. необходимое условие не выполняется.

Применяя формально к обеим частям уравнения (5) преобразование Лапласа, получим

$$\frac{1}{p^2}\,\Phi(p)=\frac{1}{p^2},$$

откуда

$$\Phi(p)=1.$$

Это есть изображение δ-функции $\delta(x)$.

Напомним, что

$$\delta(x)\risingdotseq 1,\qquad \delta^{(m)}(x)\risingdotseq p^m,$$

m — целое $\geqslant 0$.

Итак, решение интегрального уравнения (5) есть δ-функция:

$$\varphi(x)=\delta(x).$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой, если учесть, что свертка δ-функции со всякой гладкой функцией $g(x)$ определяется так:

$$g(x)*\delta(x)=g(x),$$
$$\delta^{(k)}(x)*g(x)=g^{(k)}(x)\quad (k=1,2,\ldots).$$

В самом деле, в нашем случае $g(x)=K(x)=x$ и

$$\int_0^x K(x-t)\,\delta(t)\,dt=K(x)=x.$$

Таким образом, решение уравнения (5) существует, но уже в классе обобщенных функций.

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

298. $\displaystyle\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^2 + x - 1.$

299. $\displaystyle\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

300. $\displaystyle\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = x^2 + x^3.$

301. $\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + 1.$

302. $\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = 1 - \cos x.$

Интегральные уравнения 1-го рода с логарифмическим ядром

$$\int_0^x \varphi(t)\,\ln(x-t)\,dt = f(x), \qquad f(0) = 0 \tag{6}$$

также можно решать с помощью преобразования Лапласа.

Известно, что

$$x^\nu \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \quad (\operatorname{Re}\nu > -1). \tag{7}$$

Продифференцируем соотношение (7) по ν:

$$x^\nu \ln x \risingdotseq \frac{1}{p^{\nu+1}}\frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu} + \frac{1}{p^{\nu+1}}\ln\frac{1}{p}\cdot\Gamma(\nu+1),$$

или

$$x^\nu \ln x \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}\left[\frac{\dfrac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu}}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p}\right]. \tag{8}$$

При $\nu = 0$ имеем (задача 44)

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \quad \text{— постоянная Эйлера,}$$

и формула (8) принимает вид

$$\ln x \risingdotseq \frac{1}{p}(-\gamma - \ln p) = -\frac{\ln p + \gamma}{p}. \tag{9}$$

Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$, $f(x) \risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям (6) преобразование Лапласа и используя формулу (9), получим

$$-\Phi(p)\,\frac{\ln p + \gamma}{p} = F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = -\frac{pF(p)}{\ln p + \gamma}.$$

Запишем $\Phi(p)$ в виде

$$\Phi(p) = -\frac{p^2F(p) - f'(0)}{p(\ln p + \gamma)} - \frac{f'(0)}{p(\ln p + \gamma)}. \tag{10}$$

Так как $f(0) = 0$, то

$$p^2F(p) - f'(0) \risingdotseq f''(x). \tag{11}$$

Возвратимся к формуле (7), записав ее в виде

$$\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \risingdotseq \frac{1}{p^{\nu+1}}. \tag{12}$$

Проинтегрируем обе части (12) по ν в пределах от 0 до ∞. Получим

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \risingdotseq \int\limits_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p\ln p}.$$

По теореме подобия

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\nu a^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \risingdotseq \frac{1}{p\ln(ap)} = \frac{1}{p(\ln p + \ln a)}.$$

Если положить $a = e^\gamma$, то

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \risingdotseq \frac{1}{p(\ln p + \gamma)}. \tag{13}$$

Воспользуемся равенством (10). В силу (13)

$$\frac{f'(0)}{p(\ln p + \gamma)} \risingdotseq f'(0)\int\limits_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu.$$

Учитывая (11) и (13), первое слагаемое правой части (10) можно рассматривать как произведение изображений. Для нахождения его оригинала воспользуемся теоремой о свертке:

$$\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} \doteqdot \int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\right)dt.$$

Таким образом, решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (6) будет иметь вид

$$\varphi(x) = -\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\right)dt - f'(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu$$

(γ — постоянная Эйлера).

В частности, при $f(x)=x$ получим

$$\varphi(x) = -\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu.$$

§ 22. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода

Интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода называется уравнение вида

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

не содержащее искомой функции $\varphi(x)$ вне интеграла.

Вопрос о разрешимости таких уравнений со сколь угодно «хорошим» ядром $K(x,t)$ и правой частью $f(x)$ составляет значительные трудности.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\int_0^1 (3x^2t + xt^2 + t^3)\varphi(t)\,dt = \sin x. \tag{2}$$

Легко видеть, что при любой непрерывной функции $\varphi(t)$ левая часть (2) (после выполнения интегрирования) представляет собой многочлен вида

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

который ни при каких значениях коэффициентов A, B, C не равен тождественно на $[0,1]$ функции $\sin x$ — правой части (2). Следовательно, это уравнение в классе интегрируемых на $[0,1]$ функций решений не имеет.

Теорема Пикара. *Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода имеет решение, и притом единственное, в классе $L_2(a, b)$, если выполняются условия:*

1°. *Ядро $K(x, t)$ — вещественное симметричное.*

2°. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \tag{3}$$

является сходящимся. Здесь λ_k — характеристические числа ядра $K(x, t)$

$$f_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\, dx, \tag{4}$$

где $\varphi_k(x)$ — собственные функции ядра $K(x, t)$, соответствующие характеристическим числам λ_k.

3°. *Система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}$ полная на $[a, b]$.*

Решение уравнения (1) в этом случае представимо в виде

$$\varphi(x) = \sum_k \lambda_k f_k \varphi_k(x). \tag{5}$$

Пример 1. Решить интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^1 K(x, t)\varphi(t)\, dt = \sin^3 \pi x, \tag{6}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} (1 - x)t, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ x(1 - t), & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

Решение. Характеристические числа ядра (7)

$$\lambda_1 = \pi^2, \quad \lambda_2 = (2\pi)^2, \quad \ldots, \quad \lambda_n = (n\pi)^2, \quad \ldots,$$

а соответствующие им собственные функции

$$\varphi_1(x) = \sqrt{2}\sin \pi x, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi x, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x, \quad \ldots. \tag{8}$$

Для выяснения вопроса о разрешимости уравнения (6) при заданном формулой (7) ядре $K(x, t)$ воспользуемся теоремой Пикара. Условие 1° теоремы Пикара, очевидно, выполняется: ядро (7) вещественное и симметричное.

Правая часть уравнения (6) может быть представлена в виде

$$\sin^3 \pi x = \frac{3}{4}\sin \pi x - \frac{1}{4}\sin 3\pi x,$$

или, что то же,

$$\sin^3\pi x = \frac{3}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}\sin\pi x) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}\sin 3\pi x) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\varphi_1(x) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\varphi_3(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$ — собственные функции из системы (8). Значит,

$$f(x) = \sin^3\pi x$$

имеет следующие коэффициенты разложения по функциям системы (8):

$$f_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad f_k = 0 \quad (k \geqslant 4).$$

Ряд (3) в данном случае сводится к конечной сумме

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 (\pi^2)^2 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 (3^2\pi^2)^2 = \frac{45}{16}\pi^4.$$

Значит, выполняется и условие 2°.

Наконец, система собственных функций (8) является полной ортонормированной системой на $[0, 1]$, так что выполнено и условие 3°.

Согласно теореме Пикара уравнение (6) имеет единственное решение, представимое в виде (5):

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1 \varphi_1(x) + \lambda_3 f_3 \varphi_3(x),$$

что в нашем случае дает

$$\varphi(x) = \frac{3\pi^2}{4}(\sin\pi x - 3\sin 3\pi x). \quad \triangleright \tag{9}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что решение (9) найдено верно.

Требование полноты системы собственных функций $\{\varphi_k(x)\}$ в теореме Пикара является существенным. Покажем это на следующем примере.

Пример 2.

$$\int_0^1 t\varphi(t)\,dt = \frac{1}{3}. \tag{10}$$

Решение. Применяя изложенный в § 10 метод отыскания характеристических чисел и собственных функций, находим, что характеристическое число данного ядра есть $\lambda = 2$, а соответствующая ему собственная функция $\psi(x) = 1$.

Ясно, что «система» собственных функций, состоящая из одной только функции $\psi(x) = 1$, не является полной на $[0, 1]$. Поэтому теорема Пикара не гарантирует, что решение уравнения (10) будет единственным.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что решениями уравнения (10) будут, например, любые трехчлены вида

$$\varphi(x) = x + \alpha x^2 + \beta x^3,$$

если коэффициенты α и β связаны условием $5\alpha + 4\beta = 0$.

Очевидно, все такие решения принадлежат $L_2(0, 1)$. $\triangleright$

Задачи для самостоятельного решения

Выяснить, какие из данных интегральных уравнений разрешимы:

303. $\int\limits_0^1 (3x-2)t\varphi(t)\,dt = x^3 + 3x - 1.$ **304.** $\int\limits_0^{2\pi} \cos(x+t)\varphi(t)\,dt = \pi\cos x.$

305. $\int\limits_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)\,dt = 3\sin x - \sin 3x,$ где $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t(\pi-x)}{\pi}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{x(\pi-t)}{\pi}, & x \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$

Метод производящих функций

Функция $G(x,t)$ называется *производящей* для системы функций

$$g_0(t), g_1(t), \ldots, g_n(t), \ldots, \tag{11}$$

если

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t) x^n, \tag{12}$$

где c_n — постоянные.

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\int\limits_a^b K(x,t)\rho(t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{13}$$

в котором ядро $K(x,t)$ является производящей функцией $G(x,t)$ для некоторой действительной и ортогональной с весом $\rho(t) > 0$ на интервале (a,b) системы функций $\{g_k(t)\}$, и пусть $f(x)$ аналитична в окрестности точки $x = 0$. Будем искать решение уравнения (13) в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i(x), \tag{14}$$

где a_i — некоторые неизвестные постоянные. Подстановка (12) и (14) в (13) дает в силу ортогональности $\{g_k(t)\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n \|g_n(t)\|^2 x^n = f(x), \tag{15}$$

где

$$\|g_n(t)\|^2 = \int\limits_a^b g_n^2(t)\rho(t)\,dt.$$

Из (15) находим

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!c_n\|g_n\|^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Подставляя эти значения a_n в (14), получаем искомое решение, которое в случае полноты системы (11) будет единственным.

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = x + 1. \tag{16}$$

Решение. Функция

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}}$$

является производящей для полиномов Лежандра $P_n(t)$:

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n. \tag{17}$$

Ищем решение уравнения (16) в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x). \tag{18}$$

Подставляя (17) и (18) в (16) и учитывая, что

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1},$$

будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{2n+1} x^n = x + 1.$$

Отсюда $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_n = 0$ $(n \geqslant 2)$. Итак, решение данного уравнения

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{2}P_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x.$$ ▷

Пример 4. Решить интегральное уравнение

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xt/(1-x)}}{1-x} e^{-t}\varphi(t)\,dt = 1 - x, \quad |x| < 1. \tag{19}$$

Решение. Функция

$$G(x,t) = \frac{e^{-xt/(1-x)}}{1-x}$$

является производящей функцией для полиномов Чебышёва—Лагерра $L_n(t)$:

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)x^n. \tag{20}$$

Решение уравнения (19) ищем в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(t). \tag{21}$$

Подставляя (20) и (21) в (19), получим

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} L_n(t)x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(t)\,dt = 1 - x.$$

В силу ортогональности полиномов Чебышёва—Лагерра с весом $\rho(t) = e^{-t}$ на интервале $(0, \infty)$, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 x^n a_n = 1 - x. \tag{22}$$

Здесь использовано то, что

$$\|L_n\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-t} L_n^2(t)\,dt = (n!)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (22), найдем $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_k = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Следовательно,

$$\varphi(t) = L_0(t) - L_1(t) = 1 - (1 - t) = t.$$

Итак, $\varphi(t) = t$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Методом производящих функций решить интегральные уравнения:

306. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1 + x^2 - 2xt}} = 2x^3 - 2x.$ **307.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1 + x^2 - 2xt}} = \frac{1}{1-x}.$

308. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt/(1-x)}}{1-x} e^{-t}\varphi(t)\,dt = 2 - x^2.$

Интегральное уравнение Шлёмильха

Интегральным уравнением Шлёмильха называется уравнение вида

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi(x \sin\theta)\, d\theta, \tag{23}$$

где функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, а $\varphi(x)$ — неизвестная функция.

Покажем, что уравнение (23) имеет единственное непрерывно дифференцируемое на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ решение, а именно:

$$\varphi(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin\theta)\, d\theta.$$

Из уравнения (23) находим

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi(0)\, d\theta = \varphi(0), \quad \text{или} \quad \varphi(0) = f(0).$$

Дифференцируя по x обе части уравнения (23), получим

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi'(x \sin\theta) \sin\theta\, d\theta. \tag{24}$$

Заменим в (24) x на $x \sin\psi$:

$$f'(x \sin\psi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi'(x \sin\psi \sin\theta) \sin\theta\, d\theta. \tag{25}$$

Умножим обе части (25) на x и проинтегрируем по ψ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin\psi)\, d\psi = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \varphi'(x \sin\psi \sin\theta) \sin\theta\, d\theta \right\} d\psi.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части последнего равенства, будем иметь

$$x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin\psi)\, d\psi = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \varphi'(x \sin\psi \sin\theta) \sin\theta\, d\psi \right\} d\theta. \tag{26}$$

Введем новую переменную по формуле

$$\sin\chi = \sin\theta \sin\psi, \tag{27}$$

откуда

$$\cos\chi\, d\chi = \sin\theta \cos\psi\, d\psi,$$

так что

$$\frac{\cos\chi}{\cos\psi}\, d\chi = \sin\theta\, d\psi.$$

При $\psi = 0$ имеем $\sin\chi = 0$, т. е. $\chi = 0$, а при $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ получим $\chi = \theta$. Таким образом, равенство (26) примет вид

$$x \int_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\, d\psi = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\theta} \frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi}{\cos\psi}\, d\chi \right\} d\theta. \tag{28}$$

В силу соотношения (27) имеем

$$\sin\psi = \frac{\sin\chi}{\sin\theta}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\chi}}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{\cos^2\chi - \cos^2\theta}}{\sin\theta}. \tag{29}$$

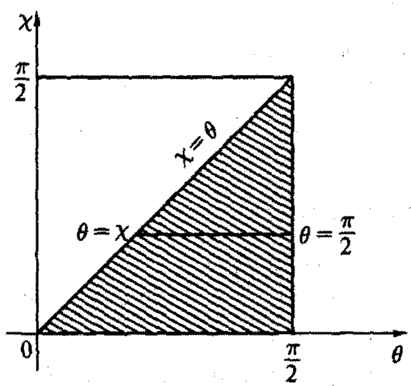

Рис. 7

Подставляя (29) в правую часть (28) и меняя порядок интегрирования (рис. 7), получим

$$x \int_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\, d\psi = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\theta} \frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\chi - \cos^2\theta}}\, d\chi \right\} d\theta =$$

$$= \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_{\chi}^{\pi/2} \frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\chi - \cos^2\theta}}\, d\theta \right\} d\chi. \tag{30}$$

Имеем

$$\int\limits_{\chi}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos^2\chi - \cos^2\theta}} = -\arcsin \frac{\cos\theta}{\cos\chi}\Big|_{\theta=\chi}^{\theta=\pi/2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, соотношение (30) принимает вид

$$x\int\limits_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\, d\psi = x\int\limits_0^{\pi/2} \varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\, d\chi. \tag{31}$$

Но

$$x\int\limits_0^{\pi/2} \varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\, d\chi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi(x\sin\chi) = \varphi(x\sin\chi)\Big|_{\chi=0}^{\chi=\pi/2} = \varphi(x) - \varphi(0). \tag{32}$$

Замечая, что $\varphi(0) = f(0)$, из (31) и (32) окончательно находим

$$\varphi(x) = f(0) + x\int\limits_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\, d\psi. \tag{33}$$

Пример 5. Решить уравнение

$$x^2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi(x\sin\theta)\, d\theta. \tag{34}$$

Решение. Уравнение (34) является уравнением Шлёмильха, где $f(x) = x^2$, а значит, $f(0) = 0$. Находим производную: $f'(x) = 2x$. Применяя формулу (33), найдем

$$\varphi(x) = x\int\limits_0^{\pi/2} 2(x\sin\psi)\, d\psi = -2x^2\cos\psi\Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi/2} = 2x^2.$$

Ответ: $\varphi(x) = 2x^2$.

Непосредственной подстановкой функции $\varphi(x) = 2x^2$ в уравнение (34) убеждаемся, что она является его решением. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения:

309. $1 + x = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(x \sin\theta)\, d\theta.$

310. $3x^2 + 2x^3 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(x \cos\theta)\, d\theta.$

311. $1 + x^2 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/6} \varphi(x \sin 3\theta)\, d\theta.$

ГЛАВА 5

Приближенные методы решения уравнений

§ 23. Замена ядра интегрального уравнения вырожденным ядром

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

с произвольным ядром $K(x,t)$. Простота нахождения решения уравнения с вырожденным ядром (см. § 9) естественно приводит к мысли о замене данного произвольного ядра $K(x,t)$ приближенно на вырожденное $L(x,t)$. В этом случае решение $\widetilde{\varphi}(x)$ нового уравнения

$$\widetilde{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int\limits_a^b L(x,t)\,\widetilde{\varphi}(t)\,dt$$

принимается как приближение к решению $\varphi(x)$ исходного уравнения (1). В качестве вырожденного ядра $L(x,t)$, близкого к данному $K(x,t)$, можно брать отрезок ряда Тейлора для функции $K(x,t)$, отрезок ряда Фурье для $K(x,t)$ по любой полной ортонормированной в $L_2(a,b)$ системе функций $\{u_n(x)\}$ и т. д. Укажем некоторые оценки погрешностей в решении (1), возникающих от замены данного ядра на вырожденное.

Пусть даны два ядра $L(x,t)$ и $K(x,t)$ и известно, что

$$\int\limits_a^b \bigl|K(x,t) - L(x,t)\bigr|\,dt < h$$

и что резольвента $R_L(x,t;\lambda)$ уравнения с ядром $L(x,t)$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_a^b \bigl|R_L(x,t;\lambda)\bigr|\,dt < R,$$

а также что $|f(x) - f_1(x)| < \eta$. Тогда, если выполнено условие

$$1 - |\lambda|\,h\bigl(1 + |\lambda|\,R\bigr) > 0,$$

то уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt + f(x)$$

имеет единственное решение $\varphi(x)$ и разность между этим решением и решением $\widetilde{\varphi}(x)$ уравнения

$$\widetilde{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b L(x,t)\,\widetilde{\varphi}(t)\,dt$$

не превосходит

$$\left|\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)\right| < \frac{N|\lambda|\left(1+|\lambda|R\right)^2 h}{1-|\lambda|h\left(1+|\lambda|R\right)} + \eta,$$

где N — верхняя граница $|f(x)|$.

Для вырожденного ядра $L(x,t)$ резольвента $R_L(x,t;\lambda)$ находится просто, а именно, если

$$L(x,t) = \sum_{k=1}^{n} X_k(x)\,T_k(t),$$

то, полагая

$$\int_a^b X_k(x)\,T_s(x)\,dx = a_{sk},$$

получаем

$$R_L(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)},$$

где

$$D(x,t;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & \ldots & X_n(x) \\ T_1(t) & 1-\lambda a_{11} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_n(t) & -\lambda a_{n1} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Корни $D(\lambda)$ суть характеристические числа ядра $L(x,t)$.

Приведем еще одну оценку ($\lambda = 1$). Пусть

$$K(x,t) = L(x,t) + \Lambda(x,t),$$

где $L(x,t)$ — вырожденное ядро, а $\Lambda(x,t)$ имеет малую норму в некоторой метрике. Пусть, далее, $R_K(x,t)$, $R_L(x,t)$ суть резольвенты ядер $K(x,t)$ и $L(x,t)$ соответственно. $\|\Lambda\|$, $\|R_K\|$, $\|R_L\|$ — нормы операторов с соответствующими ядрами. Тогда

$$\|\varphi - \widetilde{\varphi}\| \leqslant \|\Lambda\| \cdot \left(1 + \|R_K\|\right)\left(1 + \|R_L\|\right) \cdot \|f\|, \tag{2}$$

причем норма в формуле (2) может быть взята в любом функциональном пространстве. Для нормы резольвенты R любого ядра $K(x,t)$ справедлива оценка

$$\|R\| \leqslant \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|}.$$

При этом в пространстве $C(0,1)$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$

$$\|K\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 |K(x,t)|\,dt,$$

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|.$$

В пространстве функций, суммируемых с квадратом по $\Omega\,\{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$,

$$\|K\| \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/2},$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Пример. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x\cos xt)\,\varphi(t)\,dt,$$

заменив его ядро на вырожденное.

<u>*Решение*</u>. Разлагая в ряд ядро $K(x,t) = 1 - x\cos xt$, получим

$$K(x,t) = 1 - x + \frac{x^3t^2}{2} - \frac{x^5t^4}{24} + \ldots. \tag{3}$$

Возьмем в качестве вырожденного ядра $L(x, t)$ первые три члена разложения (3):

$$L(x, t) = 1 - x + \frac{x^3t^2}{2},$$

и будем решать новое уравнение

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sin x + \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right) \widetilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{4}$$

Из (4) получаем

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sin x + C_1(1 - x) + C_2x^3, \tag{5}$$

где

$$C_1 = \int_0^1 \widetilde{\varphi}(t)\, dt, \quad C_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\widetilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6), получим систему для определения C_1 и C_2. Имеем

$$C_1 = \int_0^1 \left[\sin t + C_1(1 - t) + C_2t^3\right] dt = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_2 + 1 - \cos 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[t^2\sin t + C_1(t^2 - t^3) + C_2t^5\right] dt = \frac{1}{24}\,C_1 + \frac{1}{12}\,C_2 + \sin 1 - 1 + \frac{1}{2}\cos 1,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,C_1 - \dfrac{1}{4}\,C_2 = 1 - \cos 1, \\ -\dfrac{1}{24}\,C_1 + \dfrac{11}{12}\,C_2 = \sin 1 + \dfrac{1}{2}\cos 1 - 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем

$$C_1 = 1{,}0031, \quad C_2 = 0{,}1674,$$

а тогда

$$\widetilde{\varphi}(x) = 1{,}0031(1 - x) + 0{,}1674x^3 + \sin x.$$

Точное решение уравнения есть $\varphi(x) \equiv 1$. ▷

Оценим теперь $\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|$ по формуле (2). В метрике пространства L_2 получим

$$\|\Lambda\| \leqslant \frac{1}{24}\left\{\int_0^1\int_0^1 x^{10}t^8\, dx\, dt\right\}^{1/2} = \frac{1}{72\sqrt{11}} < \frac{1}{238},$$

$$\|K\| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1 - x\cos xt)^2 \, dx \, dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2\cos 1 - \frac{1}{8}\cos 2 + \frac{1}{16}\sin 2 - \frac{5}{6} \right\}^{1/2} < \frac{3}{5},$$

$$\|L\| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right)^2 dx \, dt \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} < \frac{3}{5},$$

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 \sin^2 x \, dx \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2 - \sin 2}}{2} < \frac{3}{5}.$$

Нормы резольвент R_K и R_L оценим по формулам

$$\|R_K\| \leqslant \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|}, \quad \|R_L\| \leqslant \frac{\|L\|}{1 - |\lambda| \cdot \|L\|},$$

где $|\lambda| = 1$. Значит, $\|R_K\| \leqslant \frac{3}{2}$, $\|R_L\| \leqslant \frac{3}{2}$, а тогда

$$\|\varphi - \widetilde{\varphi}\| < \frac{1}{238}\left(1 + \frac{3}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\right)\frac{3}{5} < 0{,}016.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти решения интегральных уравнений с помощью замены ядра вырожденным и дать оценку погрешности решения.

312. $\varphi(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\, \varphi(t)\, dt.$

313. $\varphi(x) = x + \cos x + \int_0^1 x(\sin xt - 1)\, \varphi(t)\, dt.$

314. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + 3x - 1) + \int_0^1 (e^{-xt^2} - 1)\, x\varphi(t)\, dt.$

315. $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + \int_0^1 (1 - \cos xt^2)\, x\varphi(t)\, dt.$

§ 24. Замена интеграла конечной суммой

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $K(x,t)$ и $f(x)$ имеют непрерывные производные нужного порядка, λ — заданное число.

Возьмем какую-либо квадратурную формулу

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi(x_k), \tag{2}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — абсциссы точек отрезка $[a,b]$, а коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят от вида функции $\Phi(x)$.

Полагая в уравнении (1) $x = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\varphi(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k,t)\varphi(t)\,dt = f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Интеграл в левой части (3) заменим суммой с помощью квадратурной формулы (2):

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m K(x_k, x_m)\varphi(x_m) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Система (4) есть линейная система n алгебраических уравнений с n неизвестными $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$, которые являются приближенными значениями решения $\varphi(x)$ в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$. За приближенное решение уравнения (1) на отрезке $[a,b]$ можно принять функцию

$$\widetilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m K(x, x_m)\varphi(x_m),$$

которая принимает в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$.

Значения коэффициентов A_k и абсцисс x_k квадратурной формулы (2) будут:

1) для формулы прямоугольников:

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \ldots, \quad x_n = a + (n-1)h;$$

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = h, \quad \text{где} \quad h = \frac{b-a}{n};$$

2) для формулы трапеций:

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \ldots, \quad x_n = a + (n-1)h = b;$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = h, \quad \text{где} \quad h = \frac{b-a}{n-1};$$

3) для формулы Симпсона ($n = 2m + 1$):

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \ldots, \quad x_{2m+1} = a + 2mh = b;$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \quad A_2 = A_4 = \ldots = A_{2m} = \frac{4h}{3},$$

$$A_3 = A_5 = \ldots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \quad \text{где} \quad h = \frac{b-a}{2m}.$$

Пример. Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\varphi(t)\,dt = e^x - x. \tag{5}$$

Решение. Возьмем на отрезке $[0, 1]$ три точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$ и положим в уравнении (5) $x = 0$, $x = 0{,}5$, $x = 1$. Тогда получим соответственно

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(0{,}5) + 0{,}5\displaystyle\int_0^1 (e^{0{,}5t} - 1)\varphi(t)\,dt = e^{0{,}5} - 0{,}5, \\ \varphi(1) + \displaystyle\int_0^1 (e^t - 1)\varphi(t)\,dt = e - 1. \end{cases} \tag{6}$$

Заменим каждый из интегралов конечной суммой, воспользовавшись квадратурной формулой Симпсона

$$\int_0^1 \Phi(t)\,dt \approx \frac{\Phi(0) + 4\Phi(0{,}5) + \Phi(1)}{6}.$$

Для второго уравнения системы (6) подынтегральная функция

$$\Phi(t) = \frac{e^{0{,}5t} - 1}{2}\varphi(t),$$

так что

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(0{,}5) = \frac{e^{0{,}25} - 1}{2}\varphi(0{,}5), \quad \Phi(1) = \frac{e^{0{,}5} - 1}{2}\varphi(1).$$

Значит,

$$0{,}5\int_0^1 (e^{0{,}5t} - 1)\varphi(t)\,dt \approx \frac{e^{0{,}25} - 1}{3}\varphi(0{,}5) + \frac{e^{0{,}5} - 1}{12}\varphi(1). \tag{7}$$

Подынтегральная функция третьего уравнения системы (6)

$$\Phi(t) = (e^t - 1)\varphi(t),$$

так что

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(0{,}5) = (e^{0{,}5} - 1)\varphi(0{,}5), \quad \Phi(1) = (e - 1)\varphi(1),$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 (e^t - 1)\varphi(t)\,dt \approx \frac{4(e^{0{,}5} - 1)\varphi(0{,}5) + (e-1)\varphi(1)}{6}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (6), получим линейную систему

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \dfrac{e^{0{,}25} + 2}{3}\varphi(0{,}5) + \dfrac{e^{0{,}5} - 1}{12}\varphi(1) = e^{0{,}5} - 0{,}5, \\ \dfrac{2(e^{0{,}5} - 1)}{3}\varphi(0{,}5) + \dfrac{e+5}{6}\varphi(1) = e - 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ 1{,}0947\,\varphi(0{,}5) + 0{,}0541\,\varphi(1) = 1{,}1487, \\ 0{,}4325\,\varphi(0{,}5) + 1{,}2864\,\varphi(1) = 1{,}7183. \end{cases} \tag{9}$$

Решая систему (9), получим

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(0{,}5) = 0{,}9999, \quad \varphi(1) = 0{,}9996.$$

За приближенное решение уравнения (5) принимаем функцию

$$\widetilde{\varphi}(x) = e^x - x - \sum_{m=1}^{3} A_m x(e^{xx_m} - 1)\varphi(x_m),$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$, $A_1 = \dfrac{1}{6}$, $A_2 = \dfrac{2}{3}$ $A_3 = \dfrac{1}{6}$, или

$$\widetilde{\varphi}(x) = e^x - x(0{,}6666\,e^{0{,}5x} + 0{,}1666\,e^x) - 0{,}1668\,x.$$

Точное решение данного интегрального уравнения $\varphi(x) \equiv 1$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения с помощью замены интеграла конечной суммой:

316. $\varphi(x) + \displaystyle\int_0^1 xe^{xt}\varphi(t)\,dt = e^x$.

317. $\varphi(x) - \int\limits_0^1 \frac{x+t}{1+x+t}\,\varphi(t)\,dt = \ln\frac{2+x}{1+x}$.

318. $\varphi(x) + \pi\int\limits_0^1 x^2\cos\pi xt\cdot\varphi(t)\,dt = \pi x(1+\sin\pi x) - 2\sin^2\frac{\pi x}{2}$.

§ 25. Метод последовательных приближений

1°. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода. Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ непрерывна в $[0,a]$, а ядро $K(x,t)$ непрерывно при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$.

Возьмем какую-либо непрерывную в $[0,a]$ функцию $\varphi_0(x)$. Подставляя в правую часть уравнения (1) вместо $\varphi(x)$ функцию $\varphi_0(x)$, получаем

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x K(x,t)\varphi_0(t)\,dt.$$

Определенная таким образом функция $\varphi_1(x)$ также непрерывна на отрезке $[0,a]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots,$$

где

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt.$$

При сделанных предположениях относительно $f(x)$ и $K(x,t)$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ к решению $\varphi(x)$ интегрального уравнения (1).

Если, в частности, в качестве $\varphi_0(x)$ взять $f(x)$, то $\varphi_n(x)$ будут как раз частичными суммами ряда (2) из § 3, определяющего решение интегрального уравнения (1). Удачный выбор «нулевого» приближения $\varphi_0(x)$ может повести к быстрой сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ к решению интегрального уравнения.

Пример 1. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

взяв $\varphi_0(x) \equiv 0$.

Решение. Так как $\varphi_0(x) \equiv 0$, то $\varphi_1(x) = 1$. Далее,

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + x,$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Очевидно,

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, $\varphi_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Отсюда следует, что $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x$. Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x) = e^x$ есть решение данного интегрального уравнения. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения:

319. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) \equiv 0.$

320. $\varphi(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) \equiv 0.$

321. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) = 1.$

322. $\varphi(x) = x + 1 - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$, а) $\varphi_0(x) = 1$, б) $\varphi_0(x) = x + 1$.

323. $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$, а) $\varphi_0(x) = 1$, б) $\varphi_0(x) = x$, в) $\varphi_0(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$.

324. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi_0(x) = 1$.

325. $\varphi(x) = 2x + 2 - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$, а) $\varphi_0(x) = 1$, б) $\varphi_0(x) = 2$.

326. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int\limits_0^x x\varphi(t)\,dt$, а) $\varphi_0(x) = 2$, б) $\varphi_0(x) = 2x$.

327. $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$, $\varphi_0(x) = x^2$.

328. Пусть $K(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^x K^2(x, t)\,dt\,dx < +\infty.$$

Доказать, что уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

имеет при любом λ единственное решение $\varphi(x) \equiv 0$ в классе $L_2(0, a)$.

Метод последовательных приближений может быть применен и к решению нелинейных интегральных уравнений Вольтерра вида

$$y(x) = y_0 + \int\limits_0^x F[t, y(t)]\,dt \tag{2}$$

или более общих

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x F[x, t, \varphi(t)]\,dt \tag{3}$$

при весьма широких предположениях относительно функций $F(x, t, z)$ и $f(x)$. К уравнению вида (2) приводится задача решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y\big|_{x=0} = y_0.$$

Как и в случае линейных интегральных уравнений, будем искать решение уравнения (3) как предел последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, где, например, $\varphi_0(x) = f(x)$, а следующие элементы $\varphi_k(x)$ вычисляются последовательно по формуле

$$\varphi_k(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi_{k-1}(t))\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Если $f(x)$ и $F(x, t, z)$ суммируемы с квадратом и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \big|F(x, t, z_2) - F(x, t, z_1)\big| \leqslant a(x, t)|z_2 - z_1|, \\ \left|\int_0^x F(x, t, f(t))\,dt\right| \leqslant n(x), \end{gathered} \tag{5}$$

где функции $a(x, t)$ и $n(x)$ таковы, что в основной области $(0 \leqslant t \leqslant x \leqslant a)$

$$\int_0^a n^2(x)\,dx \leqslant N^2, \qquad \int_0^a dx \int_0^x a^2(x, t)\,dt \leqslant A^2,$$

то нелинейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода (3) имеет, и притом единственное, решение $\varphi(x) \in L_2(0, a)$, которое определяется как предел $\varphi_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$

где функции $\varphi_n(x)$ находятся по рекуррентным формулам (4). В качестве $\varphi_0(x)$ можно взять любую функцию из $L_2(0, a)$ (в частности, непрерывную функцию), для которой выполняется условие (5). Заметим, что удачный выбор нулевого приближения может облегчить решение интегрального уравнения.

Пример 2. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi^2(t)}{1 + t^2}\,dt,$$

взяв в качестве нулевого приближения: 1) $\varphi_0(x) = 0$; 2) $\varphi_0(x) = x$.

Решение. 1) Пусть $\varphi_0(x) = 0$. Тогда

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{1+\operatorname{arctg}^2 t}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1+\left(\operatorname{arctg} t + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 t\right)^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + \frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arctg}^5 x + \frac{1}{7\cdot 9}\operatorname{arctg}^7 x,$$

$$\varphi_4(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + \frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arctg}^5 x +$$

$$+ \frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}\operatorname{arctg}^7 x + \frac{38}{5\cdot 7\cdot 9^2}\operatorname{arctg}^9 x + \frac{134}{9\cdot 11\cdot 21\cdot 25}\operatorname{arctg}^{11} x +$$

$$+ \frac{4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}\operatorname{arctg}^{13} x + \frac{1}{7^2\cdot 9^2\cdot 15}\operatorname{arctg}^{15} x,$$

. . . .

Обозначая $\operatorname{arctg} x = u$ и сравнивая выражения для $\varphi_n(x)$ с разложением

$$\operatorname{tg} u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!} B_{2\nu} u^{2\nu-1}, \quad |u| < \frac{\pi}{2},$$

где B_ν — числа Бернулли[1], замечаем, что

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x) = x$ есть решение данного интегрального уравнения.

2) Пусть $\varphi_0(x) = 0$. Тогда

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt = x.$$

Аналогично находим $\varphi_n(x) = x$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

---

[1] Числа Бернулли $B_{2\nu+1}$ с нечетным индексом все равны нулю, кроме $B_1 = -\frac{1}{2}$. Число $B_0 = 1$, числа $B_{2\nu}$ определяются рекуррентными формулами

$$B_{2\nu} = -\frac{1}{2\nu+1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{2\nu-2} \frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(2\nu-2k+2)}{k!} B_k.$$

Таким образом, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ есть стационарная последовательность $\{x\}$, предел которой $\varphi(x) = x$. Решение данного интегрального уравнения получается сразу:

$$\varphi(x) = x. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

329. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1 + t + \varphi(t)}\, dt.$$

330. Методом последовательных приближений найти второе приближение $\varphi_2(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \left[\varphi^2(t) + t\varphi(t) + t^2\right] dt.$$

331. Методом последовательных приближений найти третье приближение $\varphi_3(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x \left[t\varphi^2(t) - 1\right] dt.$$

2°. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода.

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{6}$$

Строим последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ с помощью рекуррентной формулы

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi_{n-1}(t)\, dt. \tag{7}$$

Функции $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения, причем нулевое приближение $\varphi_0(x)$ может быть выбрано произвольно.

Если выполнено условие

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad \text{где} \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt},$$

то последовательность (7) сходится к решению уравнения (6) в метрике $L_2(a,b)$. Величина погрешности $(m+1)$-го приближения определяется неравенством

$$|\varphi(x) - \varphi_{m+1}(x)| \leqslant AB^{-1}|\lambda B|^{m+1}\left(\Phi + \frac{F}{1-|\lambda B|}\right), \tag{8}$$

где

$$F = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \quad \Phi = \sqrt{\int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx}, \quad A = \sqrt{\max_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^b K^2(x,t)\,dt}.$$

Пример 3. Методом последовательных приближений решить уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 xt^2\varphi(t)\,dt + 1 \tag{9}$$

и оценить погрешность приближенного решения.

<u>*Решение*</u>. В качестве нулевого приближения возьмем $\varphi_0(x) \equiv 1$. Тогда

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 xt^2 \cdot 1\,dt + 1 = 1 + \frac{x}{3},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^1 xt^2\left(1 + \frac{t}{3}\right)dt + 1 = 1 + \frac{x}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right),$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^1 xt^2\left[1 + \frac{t}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right]dt + 1 = 1 + \frac{x}{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_{m+1}(x) = 1 + \frac{x}{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^m}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{m+1}(x) = 1 + \frac{4}{9}x.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\varphi(x) = 1 + \frac{4}{9}x$$

есть решение уравнения (9).

Для оценки погрешности $(m+1)$-го приближения воспользуемся неравенством (8). В нашем случае

$$\lambda = 1, \quad \Phi = 1, \quad F = 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{15}},$$

так что

$$|\varphi(x) - \varphi_{m+1}(x)| \leqslant \frac{29 + \sqrt{15}}{14\sqrt{5}(\sqrt{15})^m}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Методом последовательных приближений решить уравнения:

332. $\varphi(x) = x + 4\int\limits_0^1 x^2t^2\,\varphi(t)\,dt.$ **333.** $\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt.$

334. Найти третье приближение $\varphi_3(x)$ к решению интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \text{где} \quad K(x,t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t, \end{cases}$$

и оценить погрешность.

Отметим, что основная трудность применения метода последовательных приближений состоит в вычислении интегралов в формулах (7). Как правило, приходится применять формулы приближенного интегрирования. Поэтому и здесь целесообразно заменить данное ядро вырожденным с помощью тейлоровского разложения, а затем уже ввести метод итераций.

3°. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода.

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{10}$$

где ядро $K(x,t)$ симметричное, суммируемое с квадратом и положительно определенное, а $f(x) \in L_2(a,b)$.

Пусть известно, что уравнение (10) однозначно разрешимо.
Тогда последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, определяемая соотношением

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \lambda\left[f(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)\,dt\right], \tag{11}$$

где $\varphi_0(x) \in L_2(a,b)$ и $0 < \lambda < 2\lambda_1$, λ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $K(x,t)$, сходится в среднем к решению уравнения (10).

Пример 4. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt = \sin\pi x,$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} (1-x)t, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ (1-t)x, & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение однозначно разрешимо и его решением служит функция $\varphi(x) = \pi^2 \sin\pi x$.

Наименьшее характеристическое число ядра (12) есть $\lambda_1 = \pi^2$.

Будем строить последовательные приближения по формулам (11), взяв в качестве нулевого приближения $\varphi_0(x) = 0$ и $\lambda = 1 < 2\lambda_1$. Последовательно находим

$$\varphi_1(x) = \sin\pi x,$$

$$\varphi_2(x) = \sin\pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)\sin\pi x,$$

$$\varphi_3(x) = \sin\pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)\sin\pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^2 \sin\pi x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \sin\pi x \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^n\right].$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \pi^2 \sin\pi x$$

дает точное решение данного уравнения. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Методом последовательных приближений решить уравнения:

335. $\int\limits_0^\pi K(x, t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t(\pi - x)}{\pi}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{x(\pi - t)}{\pi}, & x \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$

336. $\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{9}\cos 3x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + t^2}{2} + \dfrac{1}{3} - x, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{x^2 + t^2}{2} + \dfrac{1}{3} - t, & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

§ 26. Метод Бубнова—Галёркина

Приближенное решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

по методу Бубнова—Галёркина ищется так. Выбираем систему функций $\{u_n(x)\}$, полную в $L_2(a,b)$ и такую, что при любом n функции $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ линейно независимы, и ищем приближенное решение $\varphi_n(x)$ в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \tag{2}$$

Коэффициенты a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из следующей линейной системы:

$$\big(\varphi_n(x), u_k(x)\big) = \big(f(x), u_k(x)\big) + \lambda\left(\int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt, u_k(x)\right) \tag{3}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где (f, g) означает $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ и вместо $\varphi_n(x)$ надо подставить $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$. Если значение λ в (1) не является характеристическим, то при достаточно больших n система (3) однозначно разрешима и при $n \to \infty$ приближенное решение $\varphi_n(x)$ (2) стремится в метрике $L_2(a,b)$ к точному решению $\varphi(x)$ уравнения (1).

Пример. Методом Бубнова—Галёркина решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xt\,\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Решение. В качестве полной системы функций на $[-1, 1]$ выбираем систему полиномов Лежандра $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Приближенное решение $\varphi_n(x)$ уравнения (4) будем искать в виде

$$\varphi_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Подставляя $\varphi_3(x)$ вместо $\varphi(x)$ в уравнение (4), будем иметь

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt\left(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2 - 1}{2}\right) dt,$$

или

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + x\,\frac{2}{3}\,a_2. \tag{5}$$

Умножая обе части (5) последовательно на 1, x, $\dfrac{3x^2 - 1}{2}$ и интегрируя по x в пределах от -1 до 1, найдем

$$2a_1 = 0,$$

$$\frac{2}{3}\,a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\,a_2,$$

$$\frac{2}{5}\,a_3 = 0.$$

Отсюда $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, и, значит, $\varphi_3(x) = 3x$. Нетрудно проверить, что это — точное решение уравнения (4). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Методом Бубнова—Галёркина решить следующие интегральные уравнения:

337. $\varphi(x) = 1 + \displaystyle\int_{-1}^{1} (xt + x^2)\,\varphi(t)\,dt.$ **338.** $\varphi(x) = 1 + \dfrac{4}{3}x + \displaystyle\int_{-1}^{1} (xt^2 - x)\,\varphi(t)\,dt.$

339. $\varphi(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{xt} \varphi(t)\,dt.$

Замечание. Для вырожденных ядер метод Бубнова—Галёркина дает точное решение, а для общего случая он эквивалентен замене ядра $K(x, t)$ на вырожденное $L(x, t)$.

§ 27. Приближенные методы отыскания характеристических чисел и собственных функций симметричных ядер

1°. Метод Ритца. Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

с симметричным ядром $K(x, t) \equiv K(t, x)$.

Выберем последовательность функций $\{\psi_n(x)\}$, $\psi_n(x) \in L_2(a, b)$, такую, что система $\{\psi_n(x)\}$ полна в $L_2(a, b)$ и для любого n функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ линейно независимы на $[a, b]$. Полагаем

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x), \tag{1}$$

причем коэффициенты a_k подчиним условию $\|\varphi_n\| = 1$, и при этом условии ищем стационарные значения квадратичной формы

$$(K\varphi_n, \varphi_n).$$

Приходим к однородной системе относительно коэффициентов a_k (σ — множитель Лагранжа):

$$\sum_{k=1}^{n} \big\{(K\psi_j, \psi_k) - \sigma(\psi_j, \psi_k)\big\} a_k = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Для существования ненулевого решения определитель системы (2) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (K\psi_1, \psi_1) - \sigma(\psi_1, \psi_1) & \ldots & (K\psi_1, \psi_n) - \sigma(\psi_1, \psi_n) \\ (K\psi_2, \psi_1) - \sigma(\psi_2, \psi_1) & \ldots & (K\psi_2, \psi_n) - \sigma(\psi_2, \psi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (K\psi_n, \psi_1) - \sigma(\psi_n, \psi_1) & \ldots & (K\psi_n, \psi_n) - \sigma(\psi_n, \psi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Корни уравнения (3) дают приближенные значения собственных чисел ядра $K(x, t)$. Наибольший из корней уравнения (3) дает приближенное значение наибольшего собственного числа с недостатком. Находя σ

из (3) и подставляя в (2), ищем ненулевое решение a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ системы (2). Подставляя найденные значения a_k в (1), получаем приближенное выражение собственной функции, отвечающей найденному собственному значению.

Пример 1. Найти по методу Ритца приближенное значение наименьшего характеристического числа ядра

$$K(x, t) = xt; \quad a = 0, \ b = 1.$$

Решение. В качестве координатной системы функций $\psi_n(x)$ выбираем систему полиномов Лежандра: $\psi_n(x) = P_n(2x - 1)$. В формуле (1) ограничимся двумя слагаемыми, так что

$$\varphi_2(x) = a_1 \cdot P_0(2x - 1) + a_2 \cdot P_1(2x - 1).$$

Замечая, что

$$\psi_1 \equiv P_0(2x - 1) = 1; \quad \psi_2 \equiv P_1(2x - 1) = 2x - 1,$$

находим

$$(\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 dx = 1, \quad (\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1) = \int_0^1 (2x - 1)\, dx = 0,$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 (2x - 1)^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Далее,

$$(K\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, t)\, \psi_1(t)\, dt \right) \psi_1(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^1 xt\, dx\, dt = \frac{1}{4},$$

$$(K\psi_1, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt(2x - 1)\, dx\, dt = \frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt(2t - 1)(2x - 1)\, dx\, dt = \frac{1}{36}.$$

Система (3) в этом случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\sigma^2 - \sigma \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 0.$$

Отсюда $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \dfrac{1}{3}$. Наибольшее собственное значение $\sigma_2 = \dfrac{1}{3}$, значит, наименьшее характеристическое число $\lambda = \dfrac{1}{\sigma_2} = 3$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

По методу Ритца найти наименьшие характеристические числа ядер ($a = 0$, $b = 1$):

340. $K(x,t) = x^2t^2$. **341.** $K(x,t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t. \end{cases}$

342. $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x(2-t), & x \leqslant t, \\ \dfrac{1}{2}t(2-x), & x \geqslant t. \end{cases}$

2°. Метод следов. Назовем m-м следом ядра $K(x,t)$ число

$$A_m = \int_a^b K_m(t,t)\,dt,$$

где $K_m(x,t)$ означает m-е итерированное ядро.

Для наименьшего характеристического числа λ_1 при достаточно большом m справедлива следующая приближенная формула:

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \tag{4}$$

Формула (4) дает значение $|\lambda_1|$ с избытком.

Следы четного порядка для симметричного ядра вычисляются по формуле

$$A_{2m} = \int_a^b\int_a^b K_m^2(x,t)\,dx\,dt = 2\int_a^b\int_a^x K_m^2(x,t)\,dt\,dx. \tag{5}$$

Пример 2. Найти по методу следов первое характеристическое число ядра

$$K(x,t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = 1.$$

Решение. Так как ядро $K(x,t)$ симметрично, то достаточно найти $K_2(x,t)$ только при $t<x$.

Имеем

$$K_2(x,t)=\int_0^1 K(x,z)\,K(z,t)\,dz=$$

$$=\int_0^t z^2dz+\int_t^x zt\,dz+\int_x^1 xt\,dz=xt-\frac{x^2t}{2}-\frac{t^3}{6}.$$

Далее, по формуле (5) для $m=1$ и $m=2$ соответственно находим

$$A_2=2\int_0^1 dx\int_0^x K_1^2(x,t)\,dt=2\int_0^1 dx\int_0^x t^2\,dt=2\int_0^1\frac{x^3}{3}\,dx=\frac{1}{6},$$

$$A_4=2\int_0^1 dx\int_0^x K_2^2(x,t)\,dt=2\int_0^1 dx\int_0^x\left(x^2t^2+\frac{x^4t^2}{4}+\frac{t^6}{36}-x^3t^2-\frac{xt^4}{3}+\frac{x^2t^4}{6}\right)dt=$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{t^3x^2}{3}+\frac{t^3x^4}{12}+\frac{t^7}{7\cdot 36}-\frac{x^3t^3}{3}-\frac{xt^5}{15}+\frac{x^2t^5}{30}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}dx=$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{x^5}{3}+\frac{x^7}{12}+\frac{x^7}{7\cdot 36}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^6}{15}+\frac{x^7}{30}\right)dx=\frac{17}{630}.$$

Согласно формуле (4)

$$\lambda_1\approx\sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{630}}}=2{,}48.$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

Методом следов найти первое характеристическое число следующих ядер ($a=0$, $b=1$):

343. $K(x,t)=xt.$ **344.** $K(x,t)=x^2t^2.$

345. $K(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}x(2-t), & x\leqslant t,\\ \frac{1}{2}t(2-x), & x\geqslant t.\end{cases}$ **346.** $K(x,t)=\begin{cases}-\sqrt{xt}\,\ln t, & x\leqslant t,\\ -\sqrt{xt}\,\ln x, & x\geqslant t.\end{cases}$

3°. Метод Келлога. Пусть $K(x,t)$ симметричное ядро, которое для определенности будем считать положительно определенным, и пусть $\omega(x)$ — произвольная функция из $L_2(a,b)$. Строим последовательность функций

$$\begin{cases} \omega_1(x) = \displaystyle\int_a^b K(x,t)\,\omega(t)\,dt, \\ \omega_2(x) = \displaystyle\int_a^b K(x,t)\,\omega_1(t)\,dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_n(x) = \displaystyle\int_a^b K(x,t)\,\omega_{n-1}(t)\,dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

и рассматриваем числовую последовательность

$$\left\{ \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} \right\}. \tag{6}$$

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ — ортонормированные собственные функции ядра $K(x,t)$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — соответствующие характеристические числа. Пусть, далее, функция $\omega(x)$ ортогональна к функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x)$, но не ортогональна к собственной функции $\varphi_k(x)$. Тогда последовательность (6) имеет своим пределом k-е характеристическое число λ_k.

Последовательность функций $\left\{ \dfrac{\omega_n(x)}{\|\omega_n(x)\|} \right\}$ *сходится* в этом случае к некоторой функции, являющейся линейной комбинацией собственных функций, отвечающей характеристическому числу λ_k. К тому же пределу, что и последовательность (6), сходится последовательность

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}} \right\}.$$

Если $(\omega, \varphi_1) \neq 0$, получаем две приближенные формулы для наименьшего характеристического числа:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}, \tag{7}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}, \tag{8}$$

причем формула (7) дает значение λ_1 с избытком. Если ядро $K(x,t)$ является положительно определенным, то формулы (7), (8) дают приближенное значение наименьшей абсолютной величины характеристического числа данного ядра. При удачном выборе $\omega(x)$ метод Келлога сравнительно прост для вычислений.

Недостаток метода в том, что заранее неизвестно, какое из характеристических чисел удалось определить.

Пример 3. По методу Келлога вычислить наименьшее характеристическое число ядра $K(x,t) = x^2t^2$, $0 \leqslant x, t \leqslant 1$.

Решение. Возьмем $\omega(x) = x$. Тогда

$$\omega_1(x) = \int_0^1 x^2t^2t\,dt = \frac{x^2}{4},$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 x^2\frac{t^4}{4}\,dt = \frac{1}{4}\,x^2\cdot\frac{1}{5},$$

$$\omega_3(x) = \int_0^1 \frac{1}{4\cdot 5}\,x^2t^4\,dt = \frac{1}{4\cdot 5^2}\,x^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\omega_n(x) = \frac{1}{4\cdot 5^{n-1}}\,x^2.$$

Далее,

$$\|\omega_n(x)\| = \frac{1}{4\cdot 5^{n-1}}\sqrt{\int_0^1 x^4\,dx} = \frac{1}{4\cdot 5^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, согласно (7)

$$\lambda_1 \approx \frac{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{5^{n-2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{5^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = 5. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

По методу Келлога найти наименьшие характеристические числа следующих ядер:

347. $K(x,t) = xt;\qquad 0 \leqslant x,\ t \leqslant 1.$

348. $K(x,t) = \sin x \sin t;\qquad -\pi \leqslant x,\ t \leqslant \pi.$

349. $K(x,t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t; \\ x, & x \leqslant t; \end{cases}\qquad 0 \leqslant x,\ t \leqslant 1.$

350. $K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geqslant t, \end{cases} \quad 0 \leqslant x, t \leqslant 1.$

Устойчивость сжатого стержня (продольный изгиб стержня)

Уравнение изогнутой упругой линии стержня имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{dy}{dx}\right) = M, \tag{9}$$

где M — изгибающий момент, I — момент инерции поперечного сечения стержня с абсциссой x, E — модуль Юнга.

Рассмотрим случай, когда стержень сжимается силами, приложенными к его концам. Величину каждой из этих сил обозначим через P. Тогда $M = -P \cdot y$ и уравнение (9) примет вид

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{dy}{dx}\right) + P \cdot y = 0. \tag{10}$$

Концы стержня не смещаются в направлении, перпендикулярном стержню, поэтому

$$y(0) = y(l) = 0, \tag{11}$$

где l — длина стержня. Деля обе части уравнения (10) на E и полагая $\dfrac{P}{E} = \lambda$, получим

$$\frac{d}{dx}\left(I\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y = 0. \tag{12}$$

Пусть $G(x,t)$ — функция Грина дифференциального уравнения (12) при граничных условиях (11). Тогда задача (12)–(11) оказывается эквивалентной задаче решения однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int_0^l G(x,t)y(t)\,dt. \tag{13}$$

Ядро $G(x,t)$ уравнения (13) симметрично как функция Грина самосопряженной граничной задачи. Таким образом, прогиб $y(x)$ сжатого стержня удовлетворяет интегральному уравнению (13). При произвольно взятой силе P число $\lambda = \dfrac{P}{E}$ не будет характеристическим и решением уравнения (13) будет функция $y(x) \equiv 0$. Иными словами, произвольно взятая сжимающая сила оставляет стержень прямолинейным. В случае, когда

$P = \lambda_n E$, где λ_n — характеристическое число ядра $G(x,t)$, уравнение (13) будет иметь ненулевое решение, что отвечает искривлению стержня, т. е. потере его устойчивости.

Наименьшая сила P, при которой стержень теряет устойчивость, называется критической силой. Она, очевидно, равна $P_{\text{кр}} = \lambda_1 E$, где λ_1 — наименьшее характеристическое число уравнения (13). Для практических целей достаточно хорошей является приближенная формула

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l G^2(x,t)\,dx\,dt}}, \tag{14}$$

дающая λ_1 с недостатком.

Пример 4. Найти критическую силу для стержня, имеющего форму усеченного конуса с радиусами оснований r_0 и $r_1 = r_0(1+q)$, $q > 0$ (рис. 8).

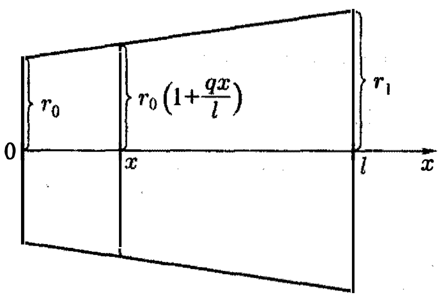

Рис. 8

Решение. Радиус сечения с абсциссой x будет

$$r(x) = r_0\left(1 + \frac{qx}{l}\right).$$

Момент инерции этого сечения будет равен

$$I = \frac{\gamma r_0^4}{2}(1+\alpha x)^4,$$

где γ — плотность стержня, $\alpha = \dfrac{q}{l}$. Уравнение (12) в этом случае принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha x)^4 \frac{dy}{dx}\right] + \mu y = 0, \qquad \mu = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}. \tag{15}$$

Для нахождения критической силы определим наименьшее характеристическое число интегрального уравнения

$$y(x) - \mu \int\limits_0^l G(x,t) y(t)\,dt = 0, \tag{16}$$

где $G(x,t)$ — функция Грина задачи (15), (11). Она имеет вид

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha t)^3} - \dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{1}{c}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\alpha t)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha x)^3} - \dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], & t \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

где

$$c = 3\alpha\left[\frac{1}{(1+\alpha l)^3} - 1\right].$$

Согласно формуле (14), наименьшее характеристическое число μ_1 уравнения (16) приближенно равно

$$\mu_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^l\int\limits_0^l G^2(x,t)\,dx\,dt}} = \frac{1}{\sqrt{2\int\limits_0^l dx\int\limits_0^x G^2(x,t)\,dt}}. \tag{17}$$

Вычисление μ_1 по формуле (17) весьма громоздко. Считая величину q малой и отбрасывая члены, содержащие степени q выше первой, упростим вычисления и получим

$$\mu_1 \approx \frac{3\sqrt{10}}{l^2\sqrt{1-4q}}.$$

Отсюда находим критическую силу:

$$P_{\text{кр}} \approx E\cdot\frac{\gamma r_0^4}{2}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{l^2\sqrt{1-4q}} \approx \frac{E\gamma r_0^4\cdot 4{,}743}{l^2}(1+2q). \tag{18}$$

Для стержня постоянного сечения $q=0$ и формула (18) дает

$$P_{\text{кр}} \approx 4{,}743\frac{E\gamma r_0^4}{l^2}.$$

Точное значение критической силы в этом случае равно

$$\frac{\pi^2 E\gamma r_0^4}{2l^2} = 4{,}948\frac{E\gamma r_0^4}{l^2}.$$

▷

Ответы

9. $\varphi(x) = -x + \int\limits_0^x (t - x)\varphi(t)\,dt.$ **10.** $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt.$

11. $\varphi(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt.$ **12.** $\varphi(x) = 5-6x+\int\limits_0^x [5-6(x-t)]\varphi(t)\,dt.$

13. $\varphi(x) = \cos x - x - \int\limits_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt.$

14. $\varphi(x) = x - \sin x + e^x(x - 1) + \int\limits_0^x [\sin x - e^x(x - t)]\varphi(t)\,dt.$

15. $\varphi(x) = \cos x - 2x(1 + x^2) - \int\limits_0^x (1 + x^2)(x - t)\varphi(t)\,dt.$

16. $\varphi(x) = xe^x + 1 - x(x^2 - 1) - \int\limits_0^x \left[x + \frac{1}{2}(x^2 - x)(x - t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

17. $\varphi(x) = x(x + 1)^2 + \int\limits_0^x x(x - t)^2\varphi(t)\,dt.$

19. $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2}{2}.$ **20.** $\varphi(x)=(1-x)e^{-2x}.$ **21.** $\varphi(x) = 1 - x.$

22. $\varphi(x) = \dfrac{4x + 1}{2x + 1}.$ **23.** $\varphi(x)=(1+x)e^x.$ **24.** $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-t)\ \ (\lambda>0).$

25. $e^{(1+\lambda)(x-t)}.$ **26.** $e^{\lambda(x-t)}e^{x^2-t^2}.$ **27.** $\dfrac{1 + x^2}{1 + t^2}e^{\lambda(x-t)}.$

28. $\dfrac{2 + \cos x}{2 + \cos t}e^{\lambda(x-t)}.$ **29.** $\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}e^{\lambda(x-t)}.$ **30.** $a^{x-t}e^{\lambda(x-t)}.$

31. $e^{x-t}(x - t + 2).$ **32.** $\dfrac{1}{4}e^{x-t} - \dfrac{9}{4}e^{-3(x-t)}.$ **33.** $2xe^{x^2-t^2}.$

34. $\dfrac{4t^2 + 1}{2(2t + 1)^2}\left[\dfrac{8}{4t^2 + 1} - 4e^{-2(x-t)}\right]$; одно из решений соответствующего дифференциального уравнения $y_1(x) = e^{-2x}$.

36. $\varphi(x) = e^{2x}.$ **37.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{5}e^{3x} - \dfrac{1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x.$

38. $\varphi(x) = 3^x(1 - e^{-x}).$ **39.** $\varphi(x) = e^x \sin x + (2 + \cos x)e^x \ln \dfrac{3}{2 + \cos x}.$

40. $\varphi(x)=e^{x^2-x}-2x.$ **41.** $\varphi(x)=e^{x^2+2x}(1+2x).$ **42.** $\varphi(x)=e^{x}(1+x^2).$

52. $I=\dfrac{1}{2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$ **54.** $\varphi(x)=\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\dfrac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}.$

55. $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^x\dfrac{\cos t}{\sqrt{x-t}}\,dt.$ **56.** $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi}\left(x^{-1/2}+e^x\displaystyle\int_0^x e^{-t}t^{-1/2}\,dt\right).$

57. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}.$

58. $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{2\pi^2}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$, где $g(x,y)=\displaystyle\iint\limits_{D_1}\dfrac{f(u,v)\,du\,dv}{\sqrt{(y-v)^2-(x-u)^2}}$ и D_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной в точке (x,y) и гипотенузой на оси Ou плоскости uOv.

59. $\varphi(x)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}x^{2/3}.$ **60.** $\varphi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

61. $\varphi(x)=\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\left[\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)x^{1/4}}+\dfrac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}x^{3/4}\right].$

62. $\varphi(x)=3.$ **63.** $\varphi(x)=\sin x.$

64. Да. **65.** Да. **66.** Да. **67.** Да. **68.** Нет. **69.** Нет. **70.** Да. **71.** Да. **72.** Да.

77. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{2x-t+\left(x+t-2xt-\frac{2}{3}\right)\lambda}{1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}.$

78. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{x^2t-xt^2+xt\left(\frac{x+t}{4}-\frac{xt}{3}-\frac{1}{5}\right)\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{240}}.$ **79.** $R(x,t;\lambda)=\sin x\cos t.$

80. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{\sin x-\sin t-\pi(1+2\sin x\sin t)\lambda}{1+2\pi^2\lambda^2}.$

81. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{x+t+1+2\left(xt+\frac{1}{3}\right)\lambda}{1-2\lambda-\frac{4}{3}\lambda^2}.$

82. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{1+3xt+\left(3\frac{x+t}{2}-3xt-1\right)\lambda}{1-2\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2}.$

83. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{4xt-x^2-\left(2x^2t-\frac{4}{3}x^2+x-\frac{4}{3}xt\right)\lambda}{1-\lambda+\frac{\lambda^2}{18}}$. **84.** $R(x,t;\lambda)=\dfrac{e^{x-t}}{1-\lambda}$.

85. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{\sin(x+t)+\pi\lambda\cos(x-t)}{1-\pi^2\lambda^2}$.

86. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{x-\operatorname{sh}t-2(e^{-1}+x\operatorname{sh}t)\lambda}{1+4e^{-1}\lambda^2}$. **87.** $\varphi(x)=1$.

88. $\varphi(x)=\dfrac{1}{6}\left[x+\dfrac{(6x-2)\lambda-\lambda^2x}{\lambda^2-3\lambda+6}\right]$. **89.** $\varphi(x)=\cos 2x$.

90. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}e^x$. **91.** $\varphi(x)=\dfrac{3x(2\lambda-3\lambda x+6)}{\lambda^2-18\lambda+18}$.

92. $K_{2n-1}(x,t)=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}(x-t)$, $K_{2n}(x,t)=2(-1)^n\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}\left(xt+\dfrac{1}{3}\right)$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

93. $K_2(x,t)=\dfrac{\sin(x+t)}{2}-\dfrac{\pi}{4}\cos(x-t)$, $K_3(x,t)=\dfrac{4-\pi^2}{16}\sin(x-t)$.

94. $K_2(x,t)=\dfrac{2}{3}(x+t)^2+2x^2t^2+\dfrac{32}{9}xt+\dfrac{2}{5}$, $K_3(x,t)=\dfrac{56}{45}(x^2+t^2)+\dfrac{8}{3}x^2t^2-4xt+\dfrac{8}{15}$.

95. $K_{2n-1}(x,t)=(2\pi)^{2n-2}(x+\sin t)$, $K_{2n}(x,t)=(2\pi)^{2n-1}(1+x\sin t)$ $(n=1,2,\ldots)$.

96. $K_n(x,t)=xe^t$. **97.** $K_n(x,t)=\left(-\dfrac{e^\pi+1}{2}\right)^{n-1}e^x\cos t$.

98. $K_2(x,t)=\begin{cases}\dfrac{e^{x+t}+e^{2-x-t}}{2}+(t-x-1)\,e^{t-x}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{e^{x+t}+e^{2-x-t}}{2}+(x-t-1)\,e^{x-t}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

99. $K_2(x,t)=\begin{cases}\dfrac{e^2+1}{2}e^{t-x}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\[2mm] \dfrac{e^2+1}{2}e^{t+x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

100. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{2e^{x+t}}{2-(e^2-1)\lambda}$; $|\lambda|<\dfrac{2}{e^2-1}$.

101. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{2\sin x\cos t}{2-\lambda}$; $|\lambda|<2$. **102.** $R(x,t;\lambda)=\dfrac{xe^{t+1}}{e-2\lambda}$; $|\lambda|<\dfrac{e}{2}$.

103. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda}$; $|\lambda|<\dfrac{3}{2}$.

104. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{5x^2t^2}{5-2\lambda}$; $|\lambda|<\dfrac{5}{2}$. **105.** $R(x,t;\lambda)=\dfrac{3xt}{3-2\lambda}$; $|\lambda|<\dfrac{3}{2}$.

106. $R(x,t;\lambda)=\sin x\cos t+\cos 2x\sin 2t$.

107. $R(x,t;\lambda)=\dfrac{1}{1-\lambda}+\dfrac{3(2x-1)(2t-1)}{3-\lambda}$; $|\lambda|<1$.

111. $\varphi(x) = \dfrac{\pi^2}{\pi - 1}\sin^2 x + 2x - \pi$. **112.** $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

113. $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}\lambda + \operatorname{ctg} x$. **114.** $\varphi(x) = \dfrac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}$.

115. $\varphi(x) = \dfrac{-\pi^2\lambda}{8(\lambda-1)} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lambda \neq 1$. **116.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\lambda\Gamma(p+1)}$.

117. $\varphi(x) = \dfrac{2\lambda^2 x + \left(\dfrac{\lambda^2}{4}+\lambda\right)\ln x}{1+\dfrac{29}{48}\lambda^2} + \dfrac{6}{5}(1-4x)$. **118.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{2-\lambda}\sin x$; $\lambda \neq 2$.

119. $\varphi(x) = \lambda\pi^3 \sin x + x$. **120.** $\varphi(x) = 2\,\dfrac{2\cos x + \pi\lambda\sin x}{4+\pi^2\lambda^2}$.

121. $\varphi(x) = \lambda\pi\sin x + \cos x$. **122.** $\varphi(x) = \dfrac{15}{32}(x+1)^2 + \dfrac{5}{16}$.

123. $\lambda_1 = \dfrac{8}{\pi-2}$, $\varphi_1(x) = \sin^2 x$. **124.** Нет.

125. $\lambda_1 = \dfrac{1}{\pi}$, $\varphi_1(x) = \sin x$. **126.** $\lambda_1 = -\dfrac{2}{\pi}$, $\lambda_2 = \dfrac{2}{\pi}$, $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$.

127. Действительных характеристических чисел и собственных функций нет.

128. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\varphi(x) = x - 2x^2$. **129.** $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $\varphi_1(x) = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{10}{3}x^2$.

130. $\lambda_1 = \dfrac{1}{4}$, $\varphi_1(x) = \dfrac{3}{2}x + x^2$. **131.** $\lambda_1 = -\dfrac{e}{2}$, $\varphi_1(x) = \operatorname{sh} x$. **132.** Нет.

133. Действительных характеристических чисел и собственных функций нет.

134. $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $\varphi_1(x) = Cx$, $\lambda_2 = \dfrac{27+3\sqrt{61}}{8}$, $\varphi_2(x) = \left(x^2 + \dfrac{6-\sqrt{61}}{5}\right)C$,
$\lambda_3 = \dfrac{27-3\sqrt{61}}{8}$, $\varphi_3(x) = \left(x^2 + \dfrac{6+\sqrt{61}}{5}\right)C$.

135. $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

136. $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0(x) = e^x$, $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $\varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

137. $\lambda_n = -\dfrac{1}{3}\mu_n^2$, $\varphi_n(x) = \sin\mu_n x + \mu_n\cos\mu_n x$, где μ_n — корни уравнения $\mu - \dfrac{1}{\mu} = 2\operatorname{ctg}\mu$. **138.** $\lambda_n = 4n^2 - 1$, $\varphi_n(x) = \sin 2nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

139. $\lambda_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1$, $\varphi_n(x) = \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x$.

140. $\lambda_n = \dfrac{1-\mu_n^2}{\sin 1}$, $\varphi_n(x) = \sin\mu_n(\pi + x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где μ_n — корни уравнения $\operatorname{tg} 2\pi\mu = -\mu\operatorname{tg} 1$.

141. $\lambda_n = 1 - \mu_n^2$, $\varphi_n(x) = \sin\mu_n x + \mu_n\cos\mu_n x$, где μ_n — корни уравнения $2\operatorname{ctg}\pi\mu = \mu - \dfrac{1}{\mu}$.

142. $\lambda_n = \dfrac{1+\mu_n^2}{2}$, $\varphi_n(x) = \sin\mu_n x + \mu_n \cos\mu_n x$, где μ_n — корни уравнения $2\operatorname{ctg}\mu = \mu - \dfrac{1}{\mu}$.

143. $\lambda_n = -1-\mu_n^2$, $\varphi_n(x) = \sin\mu_n x$, где μ_n — корни уравнения $-\operatorname{tg}\mu = \mu$ $(\mu > 0)$.

150. $\dfrac{\pi^4}{90}$. **151.** $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$. **152.** $\dfrac{1+e^{-2}}{8}$.

153. $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = 2x - 1$. **154.** $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$.

155. $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = 3x^2 - 1$.

156. $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$, $\varphi_0(x) = 1$, $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $\varphi_1^{(1)}(x) = \cos 2x$, $\varphi_1^{(2)}(x) = \sin 2x$.

158. $\lambda_0 = \dfrac{3}{2\pi^3}$, $\varphi_0(x) = 1$, $\lambda_n = (-1)^n\dfrac{n^2}{4\pi}$, $\varphi_n^{(1)}(x) = \cos nx$, $\varphi_n^{(2)}(x) = \sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

159. а) $\dfrac{1}{3}$, $\varphi(x) = \pm\sqrt{3}x$; б) $\dfrac{2}{3}$, $\varphi(x) = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$; в) 1, $\varphi(x) = \pm\sqrt{\dfrac{2}{e^2-1}}e^x$.

160. $$\varphi(x) = \begin{cases} C\cdot\sin x, & \lambda = -\dfrac{2}{\pi}, \\ C\cdot\cos x, & \lambda = \dfrac{2}{\pi}, \\ 0, & \lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$$

161. $$\varphi(x) = \begin{cases} C\cdot\arccos x, & \lambda = 1, \\ 0, & \lambda \neq 1. \end{cases}$$

162. $\varphi(x) = C$. **163.** $\varphi(x) = C|x|$. **164.** $\varphi(x) = C(x - x^2)$.

165. $\varphi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$. **166.** $\varphi(x) = 2e^x - 2 + (2-e)x$.

167. $$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\mu x - \mu\cos\mu x + \sin\mu(x-1)}{2\mu\cos\dfrac{\mu}{2}\left(\cos\dfrac{\mu}{2} + \dfrac{\mu}{2}\sin\dfrac{\mu}{2}\right)}, & \lambda > 0, \quad \mu = \sqrt{2\lambda}, \\ \dfrac{\operatorname{sh}\mu x - \mu\operatorname{ch}\mu x + \operatorname{sh}\mu(x-1)}{2\mu\operatorname{ch}\dfrac{\mu}{2}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\mu}{2} - \dfrac{\mu}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\mu}{2}\right)}, & \lambda < 0, \quad \mu = \sqrt{-2\lambda}. \end{cases}$$

168. $$\varphi(x) = 3\cos 2x + \frac{2\sin\sqrt{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}}.$$

169. $$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\cos\sqrt{\lambda+1}(\pi - x) + \cos\sqrt{\lambda+1}\pi}{(\lambda+1)\cos\pi\sqrt{\lambda+1}}, & \lambda > -1, \\ \dfrac{\lambda\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda-1}(\pi - x) + \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda-1}\pi}{(\lambda+1)\operatorname{ch}\pi\sqrt{-\lambda-1}}, & \lambda < -1, \\ \dfrac{x^2}{2} - \pi x + 1, & \lambda = -1. \end{cases}$$

170. $$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{3(\operatorname{sh}\mu x + \mu \operatorname{ch}\mu x) + \operatorname{sh}\mu(x-1) - 2\mu \operatorname{ch}\mu(x-1)}{(1+2\mu^2)\operatorname{sh}\mu + 3\mu \operatorname{ch}\mu}, \\ \lambda > 0, \quad \mu = 2\sqrt{\lambda}, \\ \dfrac{3(\sin\mu x + \mu\cos\mu x) + \sin\mu(x-1) - 2\mu\cos\mu(x-1)}{(1-2\mu^2)\sin\mu + 3\mu\cos\mu}, \\ \lambda < 0, \quad \mu = 2\sqrt{-\lambda}. \end{cases}$$

171. $\varphi(x) = -1.$ **172.** $\varphi(x) = \dfrac{e \operatorname{sh}\sqrt{2}x}{\operatorname{sh}\sqrt{2} + \sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}}.$

173. $$\varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}1\cos\mu x}{\mu\sin\mu}, & \lambda > 1, \quad \mu = \sqrt{\lambda-1}, \\ \dfrac{\operatorname{sh}1\operatorname{ch}\mu x}{\mu\operatorname{sh}\mu}, & \lambda < 1, \quad \mu = \sqrt{1-\lambda}; \end{cases}$$

если $\lambda = 1$, то решений нет.

174. $$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\mu\pi}{2} - \frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{\mu\pi}{2}}, & \lambda \geqslant 0, \quad \mu = \sqrt{2\lambda}, \\ \dfrac{\cos\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\mu\pi}{2} + \frac{\mu\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2}}, & \lambda < 0, \quad \mu = \sqrt{-2\lambda}. \end{cases}$$

175. $\varphi(x) = 1 + \dfrac{2\lambda\pi}{2-\lambda\pi}\cos^2 x$; $\lambda \neq \dfrac{2}{\pi}$. При $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ решений нет.

176. $\varphi(x) = \dfrac{e}{e-2\lambda}x$; $\lambda \neq \dfrac{e}{2}$. При $\lambda = \dfrac{e}{2}$ решений нет.

177. $\varphi(x) = x + \dfrac{2\pi^2\lambda}{1-\pi^2\lambda}|x-\pi|$; $\lambda \neq \dfrac{1}{\pi^2}$. При $\lambda = \dfrac{1}{\pi^2}$ решений нет.

178. $\varphi(x) = \dfrac{3x(2\lambda^2 x - 2\lambda^2 - 5\lambda - 6) + (\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2}$; $\lambda \neq -3$. При $\lambda = -3$ решений нет.

179. $$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 - \dfrac{3}{5}\dfrac{4\lambda+5}{4\lambda+3}x, & \text{если } \lambda \neq \dfrac{3}{2}, \quad \lambda \neq -\dfrac{3}{4}, \\ x^3 - \dfrac{11}{15}x + Cx^2, & \text{если } \lambda = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

При $\lambda = -\dfrac{3}{4}$ решений нет.

180. $$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } \lambda \neq 1, \\ C_1\cos x + C_2\sin 2x + \sin x, & \text{если } \lambda = 1. \end{cases}$$

181. $\varphi(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2} - \operatorname{th}1$, если $\lambda = -1$;

$$\varphi(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(\mu^2-1)\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\mu-\mu\operatorname{sh}\mu\operatorname{th}1}+1\right]\dfrac{1}{\mu^2}, & \lambda>-1,\quad \mu=\sqrt{\lambda+1},\\[2ex] \left[\dfrac{(\mu^2+1)\cos\mu x}{\cos\mu+\mu\sin\mu\operatorname{th}1}-1\right]\dfrac{1}{\mu^2}, & \lambda<-1,\quad \mu=\sqrt{-\lambda-1}.\end{cases}$$

182. При $\lambda\neq\dfrac{3}{2}$ параметры α,β,γ — любые числа; при $\lambda=\dfrac{3}{2}$ уравнение разрешимо при $\beta=0$ и любых α и γ.

183. При $\lambda\neq-6\pm4\sqrt{3}$ параметры α, β — любые числа; при $\lambda=-6+4\sqrt{3}$ уравнение разрешимо при условии $(e+\sqrt{3}-1)\alpha+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\beta=0$; при $\lambda=-6-4\sqrt{3}$ уравнение разрешимо при условии $(e-\sqrt{3}-1)\alpha+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\beta=0$.

184. При $\lambda\neq\dfrac{24}{\pi^3}$ уравнение разрешимо при любых значениях параметров α и β; при $\lambda=\dfrac{24}{\pi^3}$ уравнение разрешимо при условии $\pi^3\alpha+24\beta=0$.

190. $G(x,\xi)=\begin{cases}\xi-1+(\xi-2)x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (\xi-1)x-1, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

191. Очевидно, что уравнение $y''(x)=0$ при условиях $y(0)=y(1)$, $y'(0)=y'(1)$ имеет бесчисленное множество решений $y(x)=C$. Поэтому функции Грина для этой краевой задачи не существует.

192. Функции Грина не существует.

193. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}(3\xi-x), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2ex] \dfrac{\xi^2}{6}(3x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

194. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x(\xi-1)}{2}(x-x\xi+2\xi), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2ex] \dfrac{\xi}{2}[x(2-x)(\xi-2)+\xi], & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

195. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x(x-\xi)(\xi-1)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2ex] -\dfrac{\xi(\xi-x)(x-1)}{2}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

196. Функции Грина не существует.

197. Функции Грина не существует.

198. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}k(\xi-1)\operatorname{sh}kx}{k\operatorname{sh}k}, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}k\xi\operatorname{sh}k(x-1)}{k\operatorname{sh}k}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

199. $$G(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{\cos\left(x-\xi+\dfrac{1}{2}\right)}{2\sin\dfrac{1}{2}}, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] \dfrac{\cos\left(\xi-x+\dfrac{1}{2}\right)}{2\sin\dfrac{1}{2}}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

200. Функции Грина не существует.

201. $$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{(hx+1)[H(\xi-1)-1]}{h+H+hH}, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] \dfrac{(h\xi+1)[H(x-1)-1]}{h+H+hH}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

202. $$G(x,\xi)=\begin{cases} \alpha+1-\dfrac{1}{\xi}, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] \alpha+1-\dfrac{1}{x}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

203. $$G(x,\xi)=\begin{cases} \xi-\ln\xi-1-\dfrac{x(\xi-1)^2}{2\xi}, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] x-\ln x-1-\dfrac{\xi(x-1)^2}{2x}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

204. $$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}\left(1-\dfrac{1}{\xi^2}\right), & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

205. $$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}\left(\xi-\dfrac{1}{\xi}\right), & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] \dfrac{\xi}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

206. $$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n-\left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n\right], & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] \dfrac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n-\left(\dfrac{\xi}{x}\right)^n\right], & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

207. $$G(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{x\ln\xi}{\xi^2(\ln\xi-1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2ex] -\dfrac{\ln x}{\xi(\ln\xi-1)^2}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

208. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\xi}{1+\xi}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

209. $G(x,\xi)=\begin{cases}\ln\dfrac{\xi}{l}, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2mm] \ln\dfrac{x}{l}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

210. $G(x,\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{1-\lambda}{2(1+\lambda)}e^{\xi-2l}-\dfrac{1}{2}e^{-\xi}\right]e^{x}, & 0\leqslant x\leqslant\xi\quad(|\lambda|\neq 1),\\[2mm] \dfrac{1-\lambda}{2(1+\lambda)}e^{\xi-2l+x}-\dfrac{1}{2}e^{\xi-x}, & \xi\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$

При $\lambda=1$ $G(x,\xi)=-\dfrac{1}{2}e^{-|x-\xi|}$ не зависит от l. При $\lambda=-1$ функции Грина не существует.

211. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}\left[1-\dfrac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha\xi)^3}-\dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2mm] \dfrac{1}{c}\left[1-\dfrac{1}{(1+\alpha\xi)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha x)^3}-\dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], & \xi\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$

где $c=3\alpha\left[\dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}-1\right]$.

212. $y=x-\dfrac{\pi}{2}\sin x$.

213. $y=\dfrac{x^2}{24}(x^2-4x+6)$.

214. $y=\dfrac{1}{4}[(1-e^2)\ln x+x^2-1]$.

215. $y=\dfrac{1}{4\pi}(2x-1)\sin\pi x$.

216. $y=2[\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}(x-1)-\operatorname{sh}1]$.

217. $y=\operatorname{sh}x+(l-x)e^{x}$.

218. $y=2\cos x+\left(2-\dfrac{\pi^2}{4}\right)\sin x+x^2-2$.

219. $y(x)=\lambda\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{\pi^3}{96}x,$

где $G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{2\xi}{\pi}-1\right)x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2mm] \xi\left(\dfrac{2x}{\pi}-1\right), & \xi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

220. $y(x)=\lambda\displaystyle\int_0^{1}G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+e^{x}-ex+x-1,$

где $G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-1)\,x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (x-1)\,\xi, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

221. $y(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \frac{x}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2}$,

где $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}(\xi - x), & -1 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}(x - \xi), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

222. $y(x) = -\lambda \int\limits_{0}^{1} G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 - 17x - 5)$,

где $G(x,\xi) = \begin{cases} (\xi - 2)\, x + \xi - 1, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (\xi - 1)\, x - 1, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

223. $y(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \frac{x^2}{24}(x^2 - 4x + 6)$,

где $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{6}(3\xi - x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{\xi^2}{6}(3x - \xi), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

224. $y(x) = -\lambda \int\limits_{0}^{1} G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \frac{1}{12}x(x - 1)(x^2 + x - 1)$,

где $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(x - \xi)(\xi - 1), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\frac{1}{2}\xi(\xi - x)(x - 1), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

225. $y(x) = e^x - \lambda \int\limits_{0}^{1} G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} (1 + x)\,\xi, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (1 + \xi)\, x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

227. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}(1 + \sqrt{1 - 2\lambda})}{2\sqrt{1 - 2\lambda}}, & x > 0, \\ \dfrac{e^{x\sqrt{1-2\lambda}}(1 - \sqrt{1 - 2\lambda})}{2\sqrt{1 - 2\lambda}}, & x < 0. \end{cases}$

228. $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, & x < 0. \end{cases}$

229. $\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{ix\omega}}{1 + e^{-\frac{\omega^2}{4}}}\, d\omega$, где $F(\omega)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

230. $\varphi(x) = e^{-x}$.

231. $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi t}{1 - t^2}, & t \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & t = 1. \end{cases}$

232. $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{2t\sin\pi t}{\pi(1-t^2)}, & t \neq 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$ **233.** $\varphi(t) = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{t^2+2}{t^4+4}$.

234. $\varphi(x) = 1$. **235.** $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$. **236.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(3e^{2x} - 1)$.

237. $\varphi(x) = \sin x$. **238.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}(2\cos\sqrt{3}x + 1)$.

239. $\varphi(x) = 1 + 2x$. **240.** $\varphi(x) = x + \dfrac{x^3}{6}$. **241.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x$.

242. $\varphi(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$. **243.** $\varphi(x) = e^x$. **244.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$.

245. $\varphi(x) = 1 + 2xe^x$. **246.** $\varphi(x) = e^x(1+x)^2$. **247.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + \sin x + \cos x)$.

248. $\varphi(x) = I_1(x)$. **249.** $\varphi(x) = -I_1(x)$.

(Здесь $I_1(x)$ — модифицированная бесселева функция 1-го рода.)

250. $\varphi_1(x) = \sin x$; $\varphi_2(x) = 0$. **251.** $\varphi_1(x) = 3e^x - 2$; $\varphi_2(x) = 3e^x - 2e^{2x}$.

252. $\varphi_1(x) = e^{2x}$; $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{2}(1 - e^{2x})$.

253. $\begin{cases} \varphi_1(x) = (x+2)\sin x + (2x+1)\cos x; \\ \varphi_2(x) = \dfrac{2+x}{2}\cos x - \dfrac{1+2x}{2}\sin x. \end{cases}$

254. $\varphi_1(x) = 2\sin x$; $\varphi_2(x) = 2\cos x - 1$; $\varphi_3(x) = x$.

255. $\varphi_1(x) = \cos x$; $\varphi_2(x) = \sin x$; $\varphi_3(x) = \sin x + \cos x$.

256. $\begin{cases} \varphi_1(x) = \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x; \\ \varphi_2(x) = 1 - x + \dfrac{1}{2}\sin x - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\cos x; \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\sin x. \end{cases}$

257. $\varphi(x) = e^x - 1$. **258.** $\varphi(x) = -e^x$. **259.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}x\sin x$.

260. $\varphi(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$. **261.** $\varphi(x) = 1 - \cos x$.

262. $\varphi(x) = 1 - x + 2(\sin x - \cos x)$.

263. $\varphi(x) = e^{-x} - xe^{-x}$. **264.** $\varphi(x) = c + 2e^{-x}$. **265.** $\varphi(x) = \cos x - \sin x$.

266. $\varphi(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} - \dfrac{e^{(\alpha-1)x}}{\alpha - 1}$. **267.** $\varphi(x) = \cos x$.

268. $\varphi(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} x - \cos x)$. **269.** $\varphi(x) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \operatorname{ch} 2x$.

270. $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\lambda^2}[e^x - \lambda(e^x - 1)]$. **271.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\lambda^2}(\cos x + \lambda\sin x)$.

272. $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\lambda^2}[\cos x + \lambda(x - \sin x)]$.

273. $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{1-\lambda}$. **274.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{1+x^2} + \sqrt{\pi}\, e^{-x}$.

275. $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{1-\lambda^2} + \dfrac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin xt\,dt \quad (|\lambda| \neq 1)$.

276. $\varphi(x) = e^{-x} + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{1+x^2}$. **277.** $\varphi(x) = \cos x - \sin x$.

278. $\varphi(x) \risingdotseq 1 - x\ln 3$. **279.** $\varphi(x) = f'(x) - f(x)\ln a$.

280. $\varphi(x) = xe^{x^2}$. **281.** $\varphi(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. **282.** $\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}(x^2+2) - 1$.

284. $\varphi(x) = 1$. **285.** $\varphi(x) = e^{-x}$. **286.** $\varphi(x) = \dfrac{15}{4}x$.

287. $\varphi(x) = \cos x - 2\sin x$. **288.** $\varphi(x) = 2x - x^2$.

289. $\varphi(x) = 2\sin x$. **290.** $\varphi(x) = 3!(xe^{-x} - x^2e^{-x})$.

291. $\varphi(x) = J_0(x)$. **292.** $\varphi(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$. **293.** $\varphi(x) = 1+2x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

294. Имеем $x^2 - t^2 = x^2 - 2xt + t^2 + 2xt - 2t^2 = (x-t)^2 + 2t(x-t)$. Поэтому $\dfrac{x^3}{3} = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt + 2\int_0^x t(x-t)\,\varphi(t)\,dt$. Переходя к изображениям и применяя теорему умножения и теорему дифференцирования изображения, в силу которой $t\varphi(t) \risingdotseq -\Phi'(p)$, получим

$$\frac{2}{p^4} = \frac{2}{p^3}\,\Phi(p) - \frac{2}{p^2}\,\Phi'(p),$$

или

$$\Phi'(p) = \frac{1}{p}\,\Phi(p) - \frac{1}{p^2}.$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$\Phi(p) = C\cdot p + \frac{1}{2p}.$$

В силу того, что $\Phi(p)$ есть функция-изображение, $\Phi(p)$ должна стремиться к 0 при $p \to \infty$, так что $C = 0$ и, значит, $\Phi(p) = \dfrac{1}{2p}$, откуда $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}$.

295. $\varphi(x) = C - x$. **296.** $\varphi(x) = C + J_0(2\sqrt{x})$. **297.** $\varphi(x) = C + x$.

298. $\varphi(x) = 2 + \delta(x) - \delta'(x)$. **299.** $\varphi(x) = \delta(x) - \sin x$. **300.** $\varphi(x) = \delta(x) + 3$.

301. $\varphi(x) = 1 + x + \delta(x) + \delta'(x)$. **302.** $\varphi(x) = 1$.

303. Неразрешимо. **304.** Разрешимо. **305.** Разрешимо.

306. $\varphi(t) = \dfrac{35t^3 - 27t}{2} \quad (0 < x < 1)$. **307.** $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{2n+1}{2}P_n(t) \quad (0 < x < 1)$.

308. $\varphi(t) = 1 + 2t - \dfrac{t^2}{2} \quad (|x| < 1)$. **309.** $\varphi(x) = 1 + \dfrac{\pi x}{2}$.

310. $\varphi(x) = 6\left(x^2 + \dfrac{\pi x^3}{4}\right)$. **311.** $\varphi(x) = 3(1 + 2x^2)$.

312. $\widetilde{\varphi}(x) = e^x - x - 0{,}5010x^2 - 0{,}1671x^3 - 0{,}0422x^4$; $|\varphi - \widetilde{\varphi}| < 0{,}008$; точное решение $\varphi(x) \equiv 1$.

313. $\widetilde{\varphi}(x) = \cos x + \frac{x}{89}[78 - 78\sin 1 - 24\cos 1 + x(84\sin 1 + 108\cos 1 - 84)]$; $|\varphi - \widetilde{\varphi}| < 0{,}040$; точное решение $\varphi(x) \equiv 1$.

314. $\widetilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2}(3x - 1 + e^{-x}) - 0{,}252x^2 + 0{,}084x^3$; $|\varphi - \widetilde{\varphi}| < 0{,}016$; точное решение $\varphi(x) = x$.

315. $\widetilde{\varphi}(x) = \frac{x + \sin x}{2} + \left(\frac{58}{9} - \frac{16}{3}\sin 1 - \frac{52}{15}\cos 1\right) x^3$; $|\varphi - \widetilde{\varphi}| < 0{,}005$; точное решение $\varphi(x) = x$.

316. Точное решение $\varphi(x) \equiv 1$. **317.** Точное решение $\varphi(x) \equiv 1$.

316. Точное решение $\varphi(x) = \pi x$.

319. $\varphi(x) = \sin x$. **320.** $\varphi(x) = \cos x$. **321.** $\varphi(x) = \operatorname{ch} x$. **322.** $\varphi(x) = 1$.

323. $\varphi(x) = x$. **324.** $\varphi(x) = e^x$. **325.** $\varphi(x) = 2$. **326.** $\varphi(x) = 2$.

327. $\varphi(x) = x^2 - 2x$. **328.** $\varphi(x) \equiv 0$.

330. $\varphi_2(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{63}x^7 \quad (\varphi_0(x) = 1)$.

331. $\varphi_3(x) = -x + \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{14} + \frac{x^{10}}{160} \quad (\varphi_0(x) = 0)$.

332. $\varphi(x) = x + 5x^2$, $\varphi_0(x) = x$. **333.** $\varphi(x) = x$, $\varphi_0(x) = 0$.

334. $\varphi_3(x) = 1 + \frac{22}{15}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^6$; $\varphi_0(x) = 1$; точное решение $\varphi(x) = \cos x + \operatorname{tg} 1 \cdot \sin x$.

335. Ядро уравнения имеет характеристические числа $\lambda_n = n^2$ и собственные (ортонормированные) функции $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$, так что ядро $K(x, t)$ допускает разложение

$$K(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin nt}{n^2}.$$

В данном случае $\lambda_1 = 1$. Берем $\varphi_0(x) = \frac{\sin 2x}{2}$, а $\lambda = 1$, и применяем формулу итераций

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \lambda\left[f(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi_n(t)\,dt\right].$$

Имеем

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\sin 2x + \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin nt}{n^2}\,\frac{1}{2}\sin 2t\,dt\right] =$$

$$= \frac{7}{8}\sin 2x = \frac{3}{4}\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\varphi_2 = \frac{7}{8}\sin 2x + \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx \sin nt}{n^2}\,\frac{7}{8}\sin 2t\,dt\right] =$$

$$= \frac{37}{32}\sin 2x = \frac{3}{4}\varphi_1 + \frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{и т. д.}$$

Вообще, $\varphi_{n+1}(x) = \frac{3}{4}\varphi_n(x) + \frac{1}{2}\sin 2x$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(x) = \frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) + \frac{\sin 2x}{2},$$

или $\varphi(x) = \frac{3}{4}\varphi(x) + \frac{1}{2}\sin 2x$, так что $\varphi(x) = 2\sin 2x$. Непосредственной подстановкой $\varphi(x) = 2\sin 2x$ в уравнение убеждаемся, что это есть решение.

336. Выбираем $\varphi_0(x) = \cos 3\pi x$ и $\lambda = 1$ $(\lambda > 0)$. Формула итераций дает $\varphi(x) = \pi^2\cos 3\pi x$ — решение данного уравнения.

337. $\varphi_3(x) = 6x^2 + 1$ — точное решение. **338.** $\varphi_3(x) = 1$ — точное решение.

339. $\varphi_3(x) = 1$ — точное решение.

340. $\lambda_1 = 5\frac{1}{7}$ (точное значение $\lambda_1 = 5$). **341.** $\lambda_1 = 2{,}486$; $\lambda_2 = 32{,}181$.

342. $\lambda_1 = 4{,}59$. **343.** $\lambda_1 = 3$. **344.** $\lambda_1 = 5$. **345.** $\lambda_1 = 4{,}19$.

346. $\lambda_1 = 5{,}78$. **347.** $\lambda_1 = 3$. **348.** $\lambda_1 = 4$. **349.** $\lambda_1 = 2{,}475$.

350. $\lambda_1 = 4{,}998$.

Приложение

Специальные функции

1. *Полиномами Лежандра* называются многочлены $P_n(x)$, определяемые формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Так как $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, то, пользуясь рекуррентной формулой $(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$, можно найти полиномы Лежандра любой степени $n = 2, 3 \ldots$.

Производящая функция для полиномов Лежандра

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot t^n, \quad 0 < t < 1, \quad |x| \leqslant 1.$$

Квадрат нормы полиномов Лежандра равен

$$||P_n(x)||^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

2. *Полиномами Чебышёва—Лагерра* называются многочлены $L_n(x)$, определяемые формулой

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Рекуррентная формула

$$L_{n+1} = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1)$$

позволяет получить полиномы любой степени n, зная $L_0(x) = 1$ и $L_1(x) = 1 - x$. Производящая функция имеет вид

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \cdot t^n.$$

Квадрат нормы равен $||L_n(x)||^2 = (n!)^2$.

Оглавление

Дифференциальные уравнения

Векторный анализ

Вариационное исчисление

Интегральные уравнения

Функции комплексного переменного

Операционное исчисление

Теория устойчивости

В настоящем учебном пособии авторы предлагают задачи по методам решения интегральных уравнений.

В начале каждого раздела книги приводится сводка основных теоретических положений, определений и формул, а также подробно разбирается более 70 типовых примеров.

В книге содержится 350 задач и примеров для самостоятельного решения, большинство которых снабжено ответами и указаниями к решению.

ВСЕ ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие предназначено для студентов технических вузов с математической подготовкой, а также для всех лиц, желающих познакомиться с методами решений основных типов интегральных уравнений.

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Internet: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23, 135-42-46

1240 ID 3020
9 785354 003907